

742.9.20
M E N E L A I *us Hebraicus*

S P H Æ R I C O R U M

L I B R I III. *529.9.20*
20

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* &
Arabicis, Typis exprimendos curavit
Vir Cl. Ed. HALLEIUS L. L. D.
R. S. S. & Geometriæ Professor Savil.
Oxonienfis.

Præfationem addidit

G. COSTARD, A. M.

[Without the Preface]

O X O N I I,

SUMPTIBUS ACADEMICIS,

M D C C L V I I I.

M E N A L I
S P H A E R I C O R U M
L I B R I I I

Quos olim collata MSS. Holmæ &
Arabica Typis expressendos curavit
Vr. Cl. Edm. Hallesius L.L.D.
R. S. S. & Geometriae Professor Savil.



G. COSTARD, A.M.

O X O W I L
S U M M I T T I B U S A C A D E M I C I S
M D C C L I I I

MENELAI

ALEXANDRINI SPHÆRICORUM

Lib. I.

DEFINITIONES.

- I. *Triangulum Sphericum* est spatium comprehensum sub arcibus circulorum magnorum in superficie Sphæræ.
- II. Atque hi arcus, qui semper minores sunt semicirculo, dicuntur *latera* vel *crura* Trianguli.
- III. *Anguli* autem eorum sunt anguli quos continent circuli magni in superficie Sphæræ.
- IV. Et hi *Anguli æquales* dicuntur, quando inclinantur ad invicem plana arcuum eisdem continentium æquali inclinatione.
- V. Et si duorum arcuum plana inclinentur ad invicem majori inclinatione quam duorum aliorum arcuum plana inter se, erit angulus ab iisdem arcibus contentus etiam major.
- VI. Et si plana arcuum contineant angulum rectum, ipsi arcus etiam dicuntur continere angulum rectum.

A

PROP.

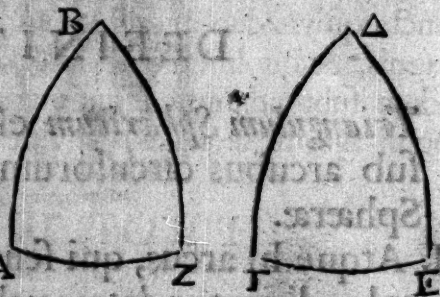
PROP. I. PROBL.

Ad punctum datum in arcu circuli magni dati in superficie Sphære, oporteat angulum facere æqualem angulo dato, sub duobus arcibus circularum magnorum in ea superficie contento.

SIT punctum datum B in superficie data, arcus autem circuli magni dati sit arcus AB, & angulus datus $\Gamma \Delta E$: & oporteat construere ad punctum B angulum æqualem angulo $\Gamma \Delta E$.

Describatur polo Δ & quolibet intervallo arcus ΓE , & polo etiam B eodemque intervallo arcus AZ, & capiatur arcus AZ arcui ΓE æqualis, & transeat per duo puncta B, Z arcus circuli magni BZ: dico angulum ABZ angulo $\Gamma \Delta E$ æqualem esse.

Quoniam duo arcus $\Gamma \Delta$, ΔE sunt arcus circularum magnorum per polos circuli ΓE transeuntium, utriusque planum^a secabit circuli ΓE circumferentiam bifariam & ad angulos rectos, adeoque utraque è communibus sectionibus planorum arcuum $\Gamma \Delta$, ΔE cum plano arcus ΓE A transeat per centrum circuli cuius arcus est ΓE ; & ^b intersectio communis planorum arcuum $\Gamma \Delta$, ΔE normalis erit super planum circuli cuius arcus ΓE , & super quamcunque rectam è centro circuli ΓE ductam: adeoque utraque è rectis, quæ ducuntur è punctis Γ , E ad centrum, normalis erit super communem planorum $\Gamma \Delta$, ΔE intersectionem. Pari modo constabit rectas, à punctis A, Z prodeuntes ad centrum circuli AZ, normales esse super communem planorum AB, BZ sectionem. Et quoniam arcus ΓE descriptus est polo Δ , & intervallo æquali intervallo quo descriptus est arcus AZ polo B, erit circulus cuius arcus est ΓE æqualis circulo cuius arcus est AZ. & arcus ΓE æqualis fit arcui AZ: quare angulus quem subtendit arcus ΓE ad centrum ejus, æqualis est angulo quem subtendit arcus AZ ad centrum ejus. Normales autem duæ prodeuntes ab eodem puncto in com-



^a 15. I Theod. ^b 19. XI Eucl.

communi sectione planorum $\Gamma \Delta$, ΔE in planis $\Gamma \Delta$, ΔE continent angulum æqualem angulo quem subtendit arcus ΓB ad centrum ejus; pariterque normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi sectione planorum AB , BZ in planis AB , BZ , continent angulum æqualem angulo quem subtendit arcus AZ ad centrum ejus: igitur normales duæ, prodeuntes ab eodem puncto in communi sectione planorum $\Gamma \Delta$, ΔE , in planis $\Gamma \Delta$, ΔE , continent angulum æqualem angulo contento sub duabus normalibus ab eodem puncto in communi sectione planorum AB , BZ in ipsis planis prodeuntibus: ac proinde inclinatio plani circuli AB ad planum circuli BZ æqualis est inclinationi plani circuli $\Gamma \Delta$ ad planum circuli ΔE . Anguli autem sub arcubus circulorum magnorum in superficie sphæræ contenti (*per def. 4.*) sunt inter se æquales, quum planorum eorundem inclinationes sunt inter se æquales: angulus igitur ABZ æqualis est angulo $\Gamma \Delta E$. Quod erat probandum.

Coroll. Et hinc manifestum est, si constituentur ad duo puncta quivis duo anguli contenti sub duobus circulis in sphæra magnis, & quolibet dato intervallo descripti duo arcus æquales iisdem subtendantur, erunt anguli illi æquales: ac è contra si anguli fuerint æquales, æquales erunt quoque arcus.

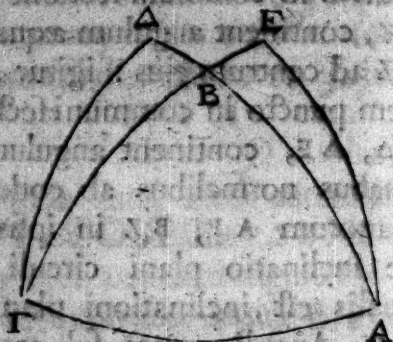
PROP. II. THEOR.

In omni triangulo Sphærico duo crura æqualia habente, erunt duo anguli apud latus tertium æquales.

Sit $AB\Gamma$ triangulum sphæricum æquicrura, cujus crura æqualia AB , $B\Gamma$: dico duos angulos apud latus $A\Gamma$, nempe angulos BAG , AGB , esse inter se æquales.

Polo A & intervallo $A\Gamma$ describatur arcus $\Gamma \Delta$, & polo Γ eodem intervallo ΓA arcus ΔE ; & producantur arcus $AB\Delta$, $\Gamma B E$. Jam quoniam uterque arcus $\Gamma B E$, $AB\Delta$ æqualis est arcui $A\Gamma$, & arcus AB æqualis arcui ΓB : erit igitur reliquus arcus $B\Delta$ æqualis reliquo $B E$. Descriptus autem est arcus $\Gamma \Delta$ polo A , ad intervallum æquale intervallo quo arcus ΔE polo Γ : erit igitur circulus cujus arcus $\Gamma \Delta$ æqualis circulo cujus arcus ΔE . Cumque arcus $AB\Delta$ transit per polos circuli $\Gamma \Delta$, erit rectus

super illum; pariterque arcus $\Gamma B E$ rectus super arcum $A E$. Jam quoniam super duas diametros duorum circularum æqualium, quorum arcus $A B$, $\Gamma \Delta$, segmenta erecta sunt æqualia, à punctis Δ , E inchoata, nempe arcus $\Delta B A$, $E B \Gamma$ continuati, in quibus sumuntur portiones æquales $B \Delta$, $B E$ minores semissi eorundem, & recta jungens puncta B , Γ æqualis est jungenti puncta A , B : erit (per I. I. II. Theod.) arcus $\Gamma \Delta$ æqualis arcui $A B$. Itaque quoniam in sphaera duo anguli $B A \Gamma$, $A \Gamma B$ continentur sub arcibus circularum magnorum, & ad duo puncta A , Γ eodem intervallo descripti sunt duo arcus $\Gamma \Delta$, $A B$, subtensi duobus illis angulis, & arcus $\Gamma \Delta$ æqualis est arcui $A B$; erit (per præcedens) angulus $B A \Gamma$ æqualis angulo $A \Gamma B$. Q. E. D.

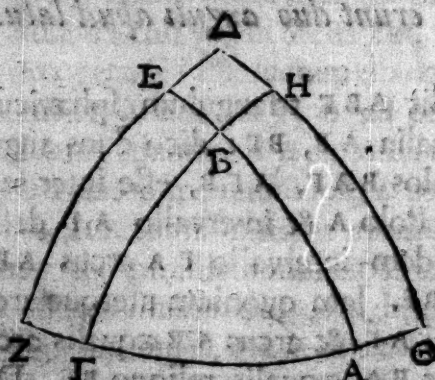


PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo anguli fuerint æquales, crura quoque æqualibus angulis opposita erunt æqualia.

In triangulo Sphærico $A B \Gamma$, si angulus A fuerit æqualis angulo Γ : dico arcum $A B$ æqualem esse arcui ΓB .

Describantur polis A , Γ arcus circularum magnorum $\Delta E Z$, $\Delta H \Theta$, qui, cum magni sint, transibunt per polum arcus $A \Gamma$; sitque polus ille arcus $A \Gamma$ in Δ : erit igitur arcus ΔZ æqualis arcui $\Delta \Theta$, arcusque $A E$ arcui ΓH . Quoniam vero angulus A æqualis est angulo Γ ; & ad duo puncta A , Γ æquali intervallo descripti sunt arcus $E Z$, $H \Theta$, subtensi duobus illis angulis æqualibus: erit (per Coroll. I. hujus) arcus $E Z$ æqualis arcui $H \Theta$: atque adeo reliquus ΔE æqualis erit reliquo arcui ΔH . Circulus autem $A B \Gamma$ transit per polum circuli $\Delta E Z$; erit igitur



(per

Sphæricorum. Lib. I.

5

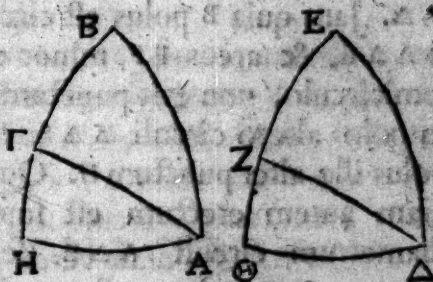
(per 15. I. Theodosii) arcus $\Delta E Z$ rectus super arcum $A B E$; ac pari modo arcus $\Delta H \Theta$ rectus est super arcum $\Gamma B H$: super diametros igitur circularum æqualium $A B E$, $\Gamma B H$, ad angulos rectos insistant segmenta æqualia æqualium circularum ΔE , ΔH . Communis autem est recta jungens puncta Δ , B ; ac proinde (per 11^{am} II. Theod.) arcus $E B$ æqualis est arcui $B H$. Sed arcus $A E$, ΓH sunt æquales: reliqui igitur $A B$, $B \Gamma$ sunt æquales. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis angulus aliquis unius æqualis fuerit angulo alterius, arcusque qui continent æquales illos angulos fuerint æquales, singuli singulis; erunt duo reliqui arcus æquales. Quod si duo reliqui arcus fuerint æquales, erunt anguli ab æqualibus arcibus contenti in utroque triangulo æquales.

Sint duo triangula Sphærica $A B \Gamma$, $\Delta E Z$; sitque angulus B trianguli $A B \Gamma$ æqualis angulo E trianguli $\Delta E Z$, & arcus $A B$ æqualis arcui ΔE , arcusque $B \Gamma$ arcui $E Z$: dico arcum $A \Gamma$ æqualem esse arcui ΔZ .

Describatur polo B , intervallo $B A$, arcus $A H$; & polo E , intervallo $E \Delta$, arcus $\Delta \Theta$. Quoniam angulus B æqualis est angulo E , & arcus $A H$ descriptus est polo B & intervallo eodem quo descriptus est arcus $\Delta \Theta$ polo E ; erit (per Coroll. I. huius) arcus $A H$ æqualis arcui $\Delta \Theta$. Quoniam vero arcus $B \Gamma$ transit per polum arcus $A H$, erit rectus super illum; pariterque arcus $E Z$ rectus erit super arcum $\Delta \Theta$: ob arcum autem $B \Gamma$ arcui $E Z$ æqualem, & arcum $B H$ ipsi $E \Theta$, (uterque enim æqualis sit ipsi $A B$) erit arcus reliquus $H \Gamma$ reliquo ΘZ æqualis. Jam quoniam ad rectos angulos insistant, super diametros duorum circularum æqualium, quorum arcus $A H$, $\Delta \Theta$ segmenta, æqualia duorum circularum æqualium, nempe arcus $\Theta Z E$, $H \Gamma B$ continuati, & in utroque seg-



segmento sumuntur æquales portiones dimidio eorundem minores, nempe arcus $\Theta Z, \Gamma H$; & in æqualibus circulis habentur segmenta æqualia $\Lambda H, \Theta \Delta$: erit recta jungens puncta Z, Δ æqualis (*per 12^{um} II. Theod.*) jungenti puncta Γ, A ; adeoque arcus $Z\Delta$ æqualis arcui ΓA .

Quod si fuerit arcus ΓA æqualis arcui $Z\Delta$, erit angulus B æqualis angulo E .

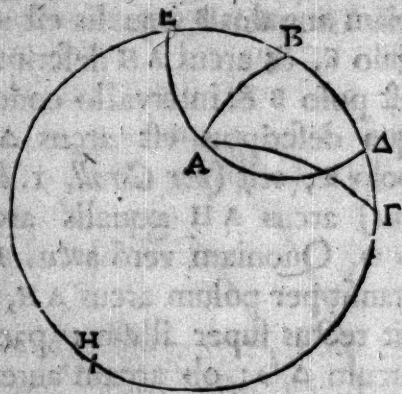
Demonstratio hujus est conversa præcedentis. Nam si arcus $Z\Delta$ æqualis fuerit arcui $\Gamma\Lambda$, erit jungens puncta Z, Δ æqualis jungenti Γ, Λ . Atqui arcus ΘZ æqualis est arcui ΓH , quorum uterque rectus est super diametrum circuli cui insistit; circuli autem illi sunt æquales: quare (*per* **II^{um} II. Theod.**) arcus $\Theta\Delta$ æqualis est arcui ΛH , & proinde (*per* **Coroll. 1^{mi} hujus**) angulus E angulo B æqualis. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

Cujuscunque trianguli Sphaerici quilibet duo arcus simul sumpti sunt majores reliquo.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum : dico quod duo quilibet arcus, è tribus AB , $B\Gamma$, ΓA ipsum comprehendentibus, simul sumpti sunt majores reliquo.

Sit $B\Gamma$ major arcus reliquis; & polo B , intervallo BA describatur circulus $A\Delta E$, qui occurrat arcui $B\Gamma$ producto ad E, Δ . Jam quia B polus est circuli $A\Delta E$, & arcus $B\Gamma$ minor est semicirculo, non erit punctum Γ in polo altero circuli $A\Delta E$. Sit polus ille alter punctum H . Quoniam autem erectum est super diametrum circuli $A\Delta B$ segmentum $\Delta\Gamma H$ à puncto Δ inceptum, & arcus ΔH æqualis est arcui HE , quo minor est arcus $\Gamma\Delta$: erit recta quæ à Γ ad Δ ducitur (*per* 1. III. *Theod.*) brevior quavis alia à puncto Γ ad peripheriam circuli $A\Delta E$ ducta: juncta igitur ΓA major est junctâ $\Gamma\Delta$; atque adeo arcus $A\Gamma$ major arcu $\Gamma\Delta$. Arcus autem AB æqualis est arcui $B\Delta$; quare duo arcus $BA, A\Gamma$ excedunt duos



Sphæricorum Lib. I.

7

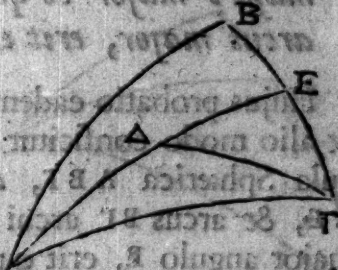
arcus $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, hoc est $B\Gamma$: quapropter duo quilibet arcus qui comprehendunt triangulum Sphæricum $AB\Gamma$ simul sumpti majores sunt arcu reliquo. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Si ab extremitatibus alicujus lateris trianguli Sphærici ducantur duo arcus, concurrentes ad punctum aliquod intra triangulum; arcus illi simul sumpti minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, & ab extremitatibus arcus $A\Gamma$ prodeant duos arcus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, concurrentes intra triangulum ad punctum Δ : dico duos arcus AB , $B\Gamma$ simul sumptos majores esse duobus arcibus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptis.

Producatur arcus $A\Delta$ usque dum concurrat cum arcu $B\Gamma$ in puncto E ; & erunt (per 5^{am} hujus) arcus AB , BE simul sumpti majores arcu AE . Est autem arcus ΓB communis: quare duo arcus AB , $B\Gamma$ simul sumpti excedunt duos arcus AE , $E\Gamma$ simul sumptos. (Sed per eandem) arcus ΔE , $E\Gamma$ simul excedunt arcum $\Delta\Gamma$; quare arcus AE , $E\Gamma$ simul excedunt arcus $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptos: duo igitur arcus AB , $B\Gamma$ simul multo majores sunt ipsis $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ simul sumptis. Q. E. D.

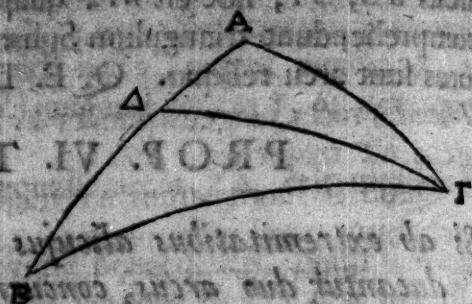


PROP. VII. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si angulus aliquis major fuerit alio; arcus qui subtenditur angulo majori major erit arcu qui subtenditur minori.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, cujus angulus Γ major sit angulo B : dico arcum AB majorem esse arcu AT .

Ad punctum Γ cum arcu
 $B\Gamma$ fiat angulus $B\Gamma\Delta$ æ-
 qualis angulo B ; & erit (per
 3^{am} hujus) arcus $B\Delta$ æ-
 qualis arcui $\Delta\Gamma$: duo igitur
 arcus $\Lambda\Delta$, $\Delta\Gamma$ æquales
 sunt arcui ΛB . Sed (per 5^{am}
 hujus) arcus $\Lambda\Delta$, $\Delta\Gamma$ majores
 sunt arcui $\Lambda\Gamma$: quare ar-
 cus ΛB major est arcui $\Lambda\Gamma$. Q. E. D.

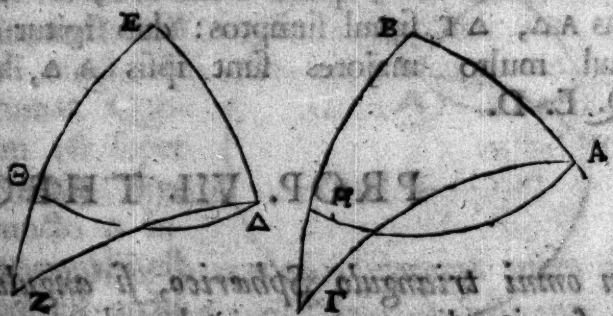


PROP. VIII. THEOR.

*Si duo triangula Sphærica habeant duo latera duobus la-
 teribus aqualia, alterum alteri; angulum autem unius
 angulo alterius, qui sub æqualibus illis lateribus com-
 prehenditur, majorem: erit arcus qui subtenditur angulo
 majori major eo qui subtenditur minori; ac si fuerit
 arcus major, erit etiam angulus major.*

Hujus probatio eadem est ac in triangulis rectilineis. Sed
 & alio modo conficitur ejusdem demonstratio. Sint duo trian-
 gula Sphærica $AB\Gamma$, $\Delta E Z$, sitque arcus AB æqualis arcui
 ΔE , & arcus $B\Gamma$ arcui $E Z$: dico quod, si fuerit angulus B
 major angulo E , erit quoque arcus $\Lambda\Gamma$ major arcui ΔZ ; ac si
 fuerit arcus $\Lambda\Gamma$ major arcui ΔZ , erit etiam angulus B major
 angulo E .

Polis B , E & in-
 intervallis æqualibus
 AB , ΔE describan-
 tur arcus AH , $\Delta\Theta$:
 cumque arcus $E Z$
 æqualis est arcui
 $B\Gamma$, & arcus BH
 arcui $E\Theta$, erit re-
 liquus $H\Gamma$ æqualis



reliquo arcui ΘZ . Quoniam vero segmenta æqualia circulo-
 rum æqualium à punctis H , Θ inchoata, nempe segmenta $H\Gamma$,
 ΘZ continuata, ad angulos rectos insistant super diametros cir-
 culorum æqualium, quorum arcus sunt AH , $\Delta\Theta$, & sumuntur in
 utroque

utroque segmento arcus æquales minores eorundem dimidiis, nempe arcus ΓH , $Z \Theta$; ob angulum autem B majorem angulo E , arcus $\Delta \Theta$ minor est arcu AH : erit igitur (per *1^{am} III. Theod.*) recta jungens puncta Z , Δ minor junctâ $A\Gamma$, adeoque arcus $A\Gamma$ major arcu ΔZ .

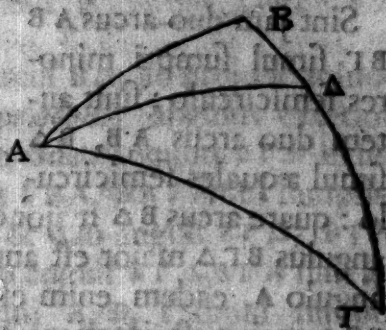
Quod si fuerit arcus $A\Gamma$ major arcu ΔZ , pari argumento probabitur quod recta jungens Z , Δ minor est jungente puncta A , Γ ; unde & arcus $\Theta \Delta$ minor erit arcu AH , ac proinde angulus B major angulo E . Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico major arcus majorem angulum subtendit.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, sitque arcus $B\Gamma$ major arcu BA : dico quod angulus A major est angulo Γ .

In arcu $B\Gamma$ fiat $\Gamma \Delta$ æqualis arcui AB , & per puncta A , Δ ducatur arcus circuli magni $A\Delta$. Quoniam igitur duo arcus AB , $B\Delta$ simul sumpti (per *5^{am} huj.*) sunt majores arcu $A\Delta$, & arcus AB æqualis est arcui $\Delta \Gamma$; erit arcus $B\Delta \Gamma$ major arcu $A\Delta$. Est autem arcus $\Delta \Gamma$ æqualis ipsi AB , & $A\Gamma$ communis; proinde duo arcus $\Delta \Gamma$, ΓA æquales sunt duobus BA , $\Delta \Gamma$, unusquisque relativo suo. Basis autem $B\Delta \Gamma$ major est basi $A\Delta$: quare (per *præced.*) angulus $B\Delta \Gamma$ major est angulo $A\Gamma B$. Q. E. D.



PROP. X. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si duo latera simul sumpta æqualia fuerint semicirculo; producto reliquo latere, angulus exterior æqualis erit interiori & opposito super latus productum. Si vero duo latera simul minora sint semicirculo, tum angulus exterior major erit interiori & opposito super latus productum. Quod si

B

duo latera simul majora fuerint semicirculo, erit angulus exterior minor interiore sibi opposito.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, & duo latera ejus AB , $B\Gamma$ simul sumpta sint æqualia semicirculo, & producat arcus $A\Gamma$: dico angulum $B\Gamma\Delta$ exteriorem æqualem esse angulo A interiori eidemque opposito. Ac si fuerint duo arcus AB , $B\Gamma$ minores semicirculo, erit angulus $B\Gamma\Delta$ major angulo A . Si vero arcus AB , $B\Gamma$ majores fuerint semicirculo, erit angulus $B\Gamma\Delta$ minor angulo A .

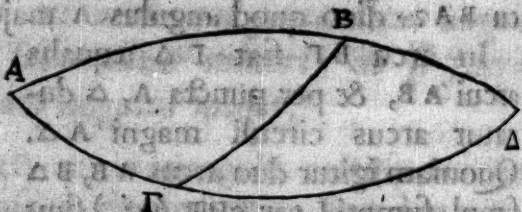
Producatur arcus AB ad occursum arcus $A\Gamma$, cui conveniat in Δ . Cumque arcus AB , $B\Gamma$ sint æquales semicirculo, duo autem arcus AB , $B\Delta$ sunt etiam æquales semicirculo; erit igitur arcus $B\Delta$ æqualis arcui $B\Gamma$, & (per 2^{am} hujus) angulus $B\Gamma\Delta$ angulo $B\Delta\Gamma$. Est autem angulus $B\Delta\Gamma$ æqualis angulo A ; quare angulus $B\Gamma\Delta$ æqualis est angulo A .

Sint jam duo arcus AB , $B\Gamma$ simul sumpti minores semicirculo; sunt autem duo arcus AB , $B\Delta$ simul æquales semicirculo: quare arcus $B\Delta$ major est arcu $B\Gamma$, adeoque (per 9^{am} hujus) angulus $B\Gamma\Delta$ major est angulo Δ . Est autem angulus Δ æqualis angulo A , eadem enim est inclinatio: quare angulus exterior $B\Gamma\Delta$ major est interiore A .

Si vero fuerint duo arcus AB , $B\Gamma$ simul majores semicirculo: dico angulum exteriorem $B\Gamma\Delta$ minorem esse angulo interiore A eidem opposito. Est enim arcus $AB\Delta$ semicirculus, ac duo arcus AB , $B\Gamma$ sunt majores semicirculo; quare arcus $B\Gamma$ major est arcu $B\Delta$, ac proinde angulus Δ major est angulo $B\Gamma\Delta$. Sed angulus Δ æqualis est angulo A : angulus igitur $B\Gamma\Delta$ minor est angulo A . Q. E. D.

Ac manifesta est hujus conversa: nempe quod si in triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior æqualis fuerit interiori & opposito, tum reliqui duo arcus simul sumpti æquantur semicirculo; ac si angulus exterior major fuerit interiore & opposito, erunt reliqui arcus simul minores semicirculo; si vero angulus exterior minor fuerit interiore & opposito, erunt reliqua latera trianguli simul sumpta majora semicirculo.

PROP.

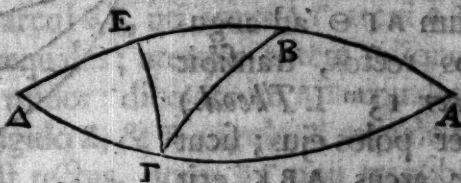


PROP. XI. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, producto uno latere, angulus exterior minor erit utrisque interioribus eidem oppositis simul sumptis: & tres anguli trianguli simul sumpti majores erunt duobus rectis.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum: dico quod angulus exterior, arcubus BF , ΓA contentus, minor est angulis A , B eidem oppositis: quodque tres anguli trianguli A , B , Γ simul sumpti excedunt duos angulos rectos.

Fiat ad punctum Γ super arcum ΓA angulus $\Delta \Gamma E$ æqualis angulo A , & producatur AB ad occursum ipsius $A\Gamma$ in puncto Δ . Jam quoniam anguli Δ , Γ sunt æquales, erunt arcus ΔE , $E\Gamma$ quoque æquales; & BE , $E\Gamma$ simul sunt æquales arcui $B\Delta$, ac proinde minores sunt semicirculo: quare (*per præced.*) angulus exterior $\Gamma B A$ major est interiore $B\Gamma E$, atque adeo angulus $B\Gamma A$ exterior trianguli $AB\Gamma$, minor est angulis $\Gamma B A$, $B A \Gamma$ simul sumptis. Adjiciatur communis angulus $B\Gamma A$; & duo anguli $B\Gamma A$, $B\Gamma A$ minores erunt angulis A , B , Γ . Sed duo anguli $B\Gamma A$, $B\Gamma A$ sunt æquales duobus rectis: quare tres anguli A , B , Γ simul sumpti excedunt duos rectos. Q. E. D.



PROP. XII. THEOR.

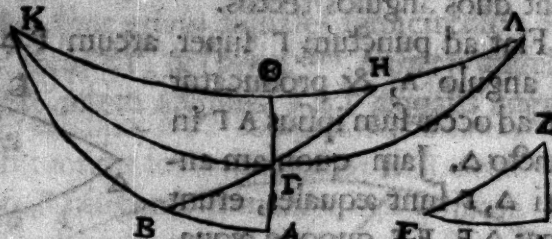
Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos rectos, ac duos alios angulos æquales quidem, sed non rectos; itemque duos arcus angulis rectis subtensos etiam æquales: erunt & duo reliqui anguli æquales, ac reliqua duo latera, in utroque triangulo, singula singulis æqualia.

Sint $AB\Gamma$, ΔEZ duo triangula Sphærica, quorum duo anguli A , Δ recti, duo vero Γ , Z æquales, sed non recti; arcus autem $B\Gamma$ sit æqualis arcui EZ : dico arcum $A\Gamma$ æqualem esse

arculi ΔZ , & arcum AB arculi ΔE , angulumque B angulo E æqualem.

Producatur $B\Gamma$ ad H , & fiat ΓH æqualis ipsi $B\Gamma$, hoc est ipsi EZ ; & producatur $A\Gamma$ ad Θ , & ponatur $\Gamma\Theta$ ipsi ΔZ æqualis; & descripto circulo magno per puncta H, Θ , producatur usque dum occurrat arculi AB producto in K . Quoniam itaque arcus $H\Gamma$ est æqualis arculi EZ , & arcus $\Gamma\Theta$ arculi ΔZ , angulusque $H\Gamma\Theta$ angulo ΔZE (est enim ex hypothesi angulus ΔZE æqualis angulo $A\Gamma B$, cui æqualis est angulus $H\Gamma\Theta$ ad verticem sito) erit igitur (per 4^{am} hujus) arcus $H\Theta$ æqualis arculi ΔE , & angulus $H\Theta\Gamma$ æqualis angulo Δ . Sed angulus Δ est rectus; quare angulus $H\Theta\Gamma$ est rectus.

Et quoniam arcus $K\Theta H$ interfecat arcum $A\Gamma\Theta$ ad angulos rectos, transibit (per 13^m I. Theod.) per polos ejus; sicut & arcus ABK erit



per polos ejus; quare punctum K polus est arcus $A\Gamma\Theta$. Transseat per puncta K, Γ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus $K\Theta H$ etiam producti in puncto Λ ; & erunt utrique arcus $\Lambda\Theta K$, $\Lambda\Gamma K$ semicirculi. Est autem punctum K polus circuli $A\Gamma\Theta$; quare Λ est polus alter: unde arcus $K\Gamma$ æqualis est arculi $\Lambda\Gamma$; & arcus $H\Gamma$ æqualis est arculi ΓB ; adeoque duo arcus $\Lambda\Gamma H\Gamma$ æquales sunt duobus $K\Gamma, \Gamma B$, ac angulus $H\Gamma\Lambda$ æqualis est angulo $K\Gamma B$; quare arcus $K\Theta$ æqualis est arculi ΛH . Verum arcus $\Lambda H\Theta$ æqualis est arculi KBA ; reliquus igitur arcus AB æqualis est arculi $H\Theta$. Constat autem arcum $H\Theta$ æqualem esse arculi ΔE ; quare arcus ΔE æqualis est arculi AB . Porro angulus KBF æqualis est angulo ΛHF ; reliquus igitur angulus $AB\Gamma$ æqualis est angulo $\Gamma H\Theta$. Arcus autem $H\Gamma$ æqualis est arculi ΓB , & arcus $H\Theta$ arculi AB ; quare arcus $A\Gamma$ æqualis est arculi $\Gamma\Theta$. Sed arcus $\Gamma\Theta$ æqualis est arculi ΔZ ; quare $A\Gamma$ æqualis est arculi ΔZ . Demonstravimus autem arcum AB æqualem ipsi ΔE ; angulus igitur B æqualis erit angulo E . Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

Si in duobus triangulis Sphæricis, duo anguli æquales fuerint; itemque duo arcus, non continentes angulos illos æquales, unusquisque relativo suo, fuerint æquales; reliqui autem duo anguli non recti [sed uterque vel acutus vel obtusus:] erit arcus reliquus unius æqualis arcui reliquo alterius; & reliqui duo anguli unius reliquis duobus angulis alterius, unusquisque relativo suo, æquales.

In duobus triangulis Sphæricis $AB\Gamma$, ΔEZ , sit angulus A æqualis angulo Δ , & arcus $B\Gamma$ arcui EZ , uti arcus $A\Gamma$ arcui ΔZ , qui contineant angulos Γ , Z æquales; uterque autem reliquus angulus B , E sit recto major vel minor: dico arcum AB æqualem esse arcui ΔE , angulumq; Γ angulo Z , & B angulo E æqualem.

Quoniam angulus B non est rectus, arcus $B\Gamma$ non transibit per polos circuli AB . Transeat igitur per punctum Γ , perque polum circuli AB arcus circuli magni $\Gamma\Theta$. Pariterque cum arcus ZE non transit per polos circuli AE , transeat per polos ejus punctumque Z arcus ZH : erunt igitur anguli H , Θ recti. Angulus autem Δ non rectus æqualis est angulo A , sicut arcus ΔZ arcui $A\Gamma$: quare (per 12^m hujus) arcus $\Gamma\Theta$ æqualis erit arcui ZH , uti arcus ΔH arcui $A\Theta$. Sed & arcus ΓB æqualis est arcui $Z E$, adeoque juncta recta ZE æqualis est junctæ ΓB . Insistunt autem super duas diametros circulorum æqualium segmenta æqualia à punctis Θ , H incepta, nempe arcus $\Theta\Gamma$, HZ continuati, in quibus sumuntur portiones æquales minores dimidiis eorundem, nempe arcus $\Theta\Gamma$, ZH ; ac recta jungens puncta B , F æqualis est junctæ $Z E$: erit igitur (per 11^m II. Theor.) arcus $B\Theta$ æqualis arcui $H E$. Est autem arcus ΔH æqualis arcui $A\Theta$; quapropter arcus AB arcui ΔE æqualis est. Q. E. D.

Quod si fuerit uterque angulus A , Δ rectus, transibit arcus $A\Gamma$ per polos circuli AB , sicut arcus ΔZ per polos circuli AE : insistent

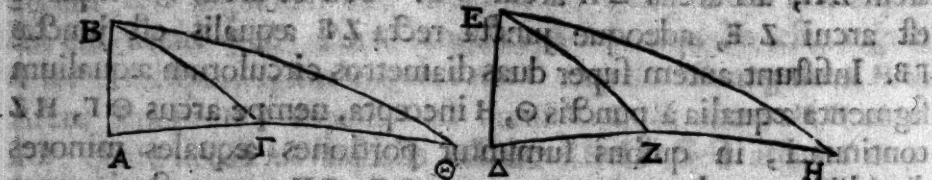
insistunt igitur super diametros circulorum æqualium AB , ΔE segmenta æqualia à punctis A , Δ inchoata, quorum portiones æquales sunt AG , ΔZ . Et ob arcum FB æqualem arcui ZE , erit juncta recta FB æqualis junctæ ZE : quapropter (per eandem 11^m II. Theod.) arcus AB æqualis est arcui ΔE . Cumque arcus omnes comprehendentes triangula ABG , ΔEZ sint inter se æquales, unusquisque relativo suo; manifestum est (ex 4^a hujus) angulos etiam eorum æquales esse, unumquemque relativo suo. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant duos angulos unius duobus angulis alterius æquales, unumquemque suo relativo; itemque arcus, apud quos sunt æquales illi anguli in utroque, æquales: erunt reliqui duo arcus unus æquales duobus reliquis alterius, unusquisque suo relativo, reliquisque angulus angulo reliquo æqualis.

Sint duo triangula Sphærica ABG , ΔEZ ; quorum angulus A sit æqualis angulo Δ , & angulus Z angulo G , arcus autem ΔZ ipsi AG æqualis: dico arcum BE æqualem esse arcui AB , arcumque ZB arcui GB , atque etiam angulum B angulo E .

Vel fuerit uterque angulus A , Δ rectus, vel non. Sint primo recti, & sit punctum Γ polus arcus AB , & erit quoque punctum Z polus arcus ΔE ; unde manifestum est arcum FB æqualem esse arcui EZ , & arcum AB arcui ΔE . Quod si punctum Γ non fuerit polus arcus AB , neque erit Z polus arcus ΔE . Cum autem angulus A sit rectus, arcus AG transibit per polos circuli AB ; pro-



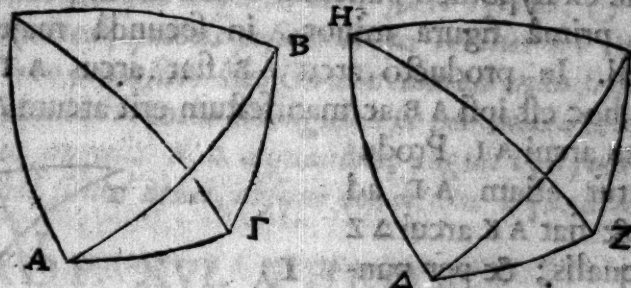
ducatur itaque AG ad polum ejus Θ . Pariterque arcus ΔZ productus transibit per polos arcus ΔE ; producaturs itaque ad polum ejus H ; ac ducantur duo arcus quadrantes circulorum magnorum, ΘB , $H E$. Quoniam vero arcus ΘA æqualis est arcui $H \Delta$, & arcus AG arcui ΔZ ; ideo reliquus arcus $\Theta \Gamma$ æqualis erit

erit arcui HZ , sicut $\odot B$ quadrans quadranti BH : angulus autem AGB æqualis est angulo ΔZE : quapropter (per præcedentem) arcus $B\Gamma$ æqualis erit arcui EZ , atque adeo (per 12^m hujus) arcus AB æqualis est arcui ΔB , angulusque B angulo B æqualis. Q. E. D.

Quod si anguli A, Δ non fuerint recti, manifestum est arcus $AG, \Delta Z$ non transire per polos arcuum $AB, \Delta E$. Ponamus igitur I polum esse circuli AB , & H polum circuli ΔE , per quos polos transeant arcus circulorum magnorum quadrantes, AI, BI ; $H\Delta, HE$: anguli igitur IAB, IBA ; $H\Delta E, HE\Delta$ sunt æquales, quippe

(per 15^m I. Theod.) recti.

Ducantur etiam arcus IG, HZ . Quoniam autem angulus BAG æqualis est angulo



$E\Delta Z$; æqualis erit angulus IAG angulo $H\Delta Z$. Et arcus AI æqualis est arcui ΔH , sicut AG arcui ΔZ ; quare (per 4^m hujus) basis IG æqualis est basi HZ , angulusque AGI angulo ΔZH . Sed angulus AGB æqualis est angulo ΔZB : quare & angulus IGB æqualis est angulo HZE . Atqui arcus HZ, HB sunt æquales ipsis IG, IB respective, & anguli IBG, HEZ sunt utrique vel obtusi vel acuti: arcus igitur reliquus EZ (per præcedentem) reliquo $B\Gamma$ æqualis est; proinde (per 4^m hujus) arcus $E\Delta$ basis trianguli $EZ\Delta$ æqualis est arcui AB basi trianguli BGA , uti angulus ΔEZ angulo ABG . Q. E. D.

a N. B. Hanc Propositionem in Codicibus Arabicis in duas dividi, partemque hanc posteriorem esse XV^{am}. Nos vero hic & in sequentibus Hebræi Codicis numeros retinebimus.

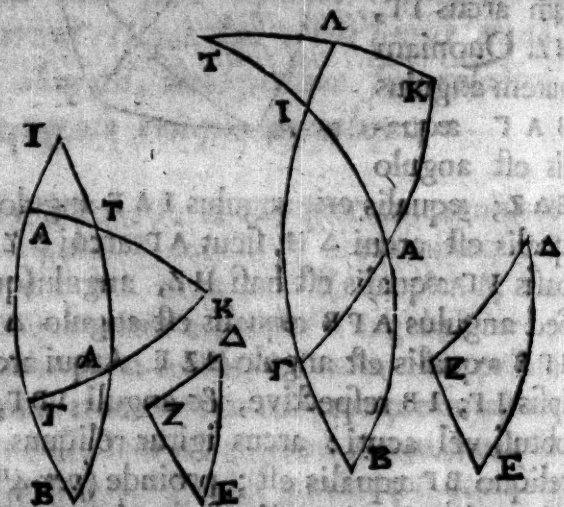
PROP. XV. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, unumquemque relativo suo; latera vero reliquos angulos in utroque continentia æqualia, unumquodque suo relativo; ac non fuerint Poli reliquorum

liquorum arcuum apud angulos illos reliquos: erunt quoque latera reliqua equalia.

Sint $\triangle B\Gamma$, $\triangle EZ$ duo triangula Sphærica, & æquales sint duo anguli unius, nempe anguli A, Γ in triangulo $\triangle B\Gamma$, angulis Δ, Z trianguli $\triangle EZ$; sintque latera angulos B, E continentia etiam æqualia, nempe arcus BZ arcui $B\Gamma$, & arcus ΔE arcui ΔZ ; nec sint puncta B, E poli arcuum $A\Gamma$, ΔZ : dico arcum ΔZ æqualem esse arcui $A\Gamma$.

Producantur arcus AB , $B\Gamma$ ad occursum in puncto I . Cumque ex hypothese punctum B non sit in polo arcus $A\Gamma$, sit AB in primâ figura minor, in secundâ major quadrante circuli. In producto arcu AB fiat arcus AT arcui ΔE æqualis, hoc est ipsi AB , ac manifestum erit arcum AT non esse æqualem arcui ΔI . Producatetur etiam $A\Gamma$ ad K , & fiat AK arcui ΔZ æqualis; & per puncta K, T transeat arcus Circuli magni KT , occurrens arcui $B\Gamma$ in Λ .



Jam quoniam duo arcus KA , AT sunt æquales duobus $\Delta Z, \Delta E$; & angulus TAK æqualis est angulo $E\Delta Z$, quippe angulo $B\Gamma$ ad verticem: erit (per 4^m hujus) arcus KT æqualis arcui ZE , hoc est arcui $B\Gamma$; & angulus AKT angulo ΔZE , hoc est angulo $A\Gamma B$. Quoniam vero angulus $A\Gamma B$ exterior trianguli $K\Delta\Gamma$ æqualis est opposito suo angulo K : erunt arcus KA , $A\Gamma$ simul sumpti (per 10^m hujus) æquales semicirculo. Sed arcus $B\Gamma I$ est semicirculus: quare arcus $B\Gamma I$ æqualis est duobus arcibus $\Gamma\Lambda$, ΛK . Jam posito, in figurâ primâ, arcu $\Gamma\Lambda$ communi; erunt reliqui arcus $B\Gamma$, ΛI æquales arcui KA . Arcus autem KT æqualis est arcui $B\Gamma$, relinquetur igitur arcus $T\Lambda$ æqualis arcui ΛI . At in figurâ II^â, sublato arcu IT communi, relinquetur arcus $B\Gamma$ æqualis utrique KA , ΛI simul; & arcus $B\Gamma$ æqualis est arcui KT : quare arcus KT æqualis est arcibus KA , ΛI ; & sublato communi arcu

KA , re

K A, reliquus arcus A T æqualis erit arcui Δ I; quare angulus A T I æqualis est angulo Δ I T, hoc est angulus T angulo B: anguli igitur trianguli A B T æquales sunt angulis trianguli A K T, quisque relativo suo; & arcus A B æqualis est arcui A T, uti arcus B T arcui K T: reliquus igitur arcus A T (per 4^m. hujus) æqualis est arcui A K. Sed arcus A K æqualis factus est arcui Δ Z: quare arcus A T æqualis est arcui Δ Z. Q. E. D.

S C H O L I O N.

In hac Propositione merito cavetur ne angulus B sit in polo arcus A T: sic enim uterque angulus A, T foret rectus, & arcus A B, B T quadrantes; quibus positis arcus tertius A T indefinitus manet. Porro propositio hæc Corollarium est manifestum 13^{mæ} hujus, ubi demonstrantur triangula esse per omnia æqualia, si, existentibus angulis A, Δ æqualibus, anguli T, Z fuerint vel simul obtusi vel simul acuti, absque conditione æqualitatis.

P R O P. XVI. T H E O R.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unus duobus alterius angulis, singulos singulis æquales; latus vero alteri æqualium oppositum in uno æquale sit lateri relativo in altero; arcus vero, in utroque triangulo, alteri angulorum æqualium oppositi simul sumpti non conficiant semicirculum erunt: tum latera illa in utroque æqualia, tum & reliqua latera, reliquique duo anguli æquales.

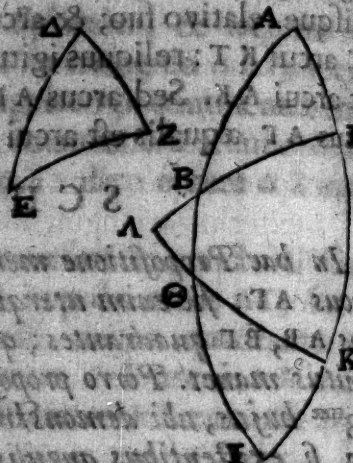
Sint A B T, Δ E Z duo triangula Sphærica, sitque angulus A æqualis angulo Δ , & angulus T angulo Z, arcus vero B T arcui E Z æqualis; arcus autem A B, Δ E simul sumpti non sint semicirculo æquales: dico arcum A B æqualem esse arcui Δ E, & arcum A T arcui Δ Z, angulumque B angulo E.

Producantur duo arcus A B, A T ad occursum in puncto I, Cūque duo arcus A B, Δ E non sint semicirculo æquales, atque arcus A I est semicirculus; igitur arcus B I non erit æqualis arcui Δ E: pariterque arcus T I non erit arcui Δ Z æqualis. Fiat arcus I Θ arcui Δ E æqualis, & arcus I K arcui Δ Z; & producat arcus circuli magni per K, Θ ad occursum arcus B T in A.

C

Quoniam

Quoniam itaque duo arcus KI , $I\Theta$ sunt æquales arcibus ΔZ , ΔE ; & angulus Δ æqualis est angulo I (ob angulum I angulo A æqualem, qui ex hypothesi æqualis est angulo Δ) erit (per 4^m hujus) arcus ΘK æqualis arcui $Z E$. Arcus autem $Z E$ æqualis est arcui BT ; quare ΘK æqualis est arcui BT ; & angulus ΘKI æqualis est angulo $\Delta Z E$, qui quidem æqualis est angulo $\Lambda \Gamma B$; quare anguli $\Lambda \Gamma B$, ΘKI sunt æquales, ac proinde angulus $\Lambda \Gamma K$ angulo $\Lambda K \Gamma$ æqualis; adeoque (per 3^m hujus) arcus $\Gamma \Delta$ æqualis est arcui ΛK . Sed arcus ΓB æqualis est arcui ΘK ; quare arcus $\Lambda \Theta$ æqualis est arcui ΛB , ac propterea angulus $\Lambda B \Gamma$ æqualis est angulo $I \Theta K$. Angulus autem $I \Theta K$ æqualis est angulo $\Delta E Z$; quare angulus $\Lambda B \Gamma$ est æqualis angulo $\Delta E Z$; atque angulus Z ex hypothesi æqualis est angulo Γ , sicut arcus $E Z$ arcui ΔZ ; quare (per 14^{am} hujus) arcus ΛB æqualis est arcui ΔE , & arcus $\Lambda \Gamma$ arcui ΔZ . Et jam demonstratum est angulum B æqualem esse angulo E . Q. E. D.



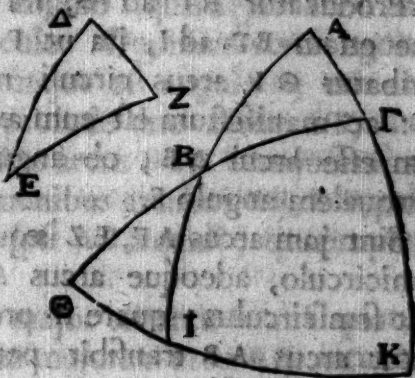
PROP. XVII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant tres angulos unius æquales tribus angulis alterius, quemque suæ relativo; erunt quoque arcus triangula illa continentes inter se æquales, quisque relativo suo.

Sint $\Lambda B \Gamma$, $\Delta E Z$ duo triangula Sphærica, in quibus angulus A sit æqualis angulo Δ , & angulus B angulo E , sicut angulus Γ angulo Z : dico arcum ΛB æqualem esse arcui ΔE , & arcum $B \Gamma$ arcui $E Z$, arcumque $\Lambda \Gamma$ arcui ΔZ .

Producatur arcus ΛB ad I , & fiat BI ipsi ΔE æqualis; & producto $B \Gamma$ ad Θ , fiat $B \Theta$ æqualis arcui $E Z$; & ducatur $I \Theta$ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum arcus $\Lambda \Gamma$ etiam producti in puncto K . Jam duo arcus ΘB , $B I$ æquales sunt duobus ΔE , $E Z$, & angulo B æqualis est angulus B : quare arcus $I \Theta$ æqualis est arcui ΔZ , & angulus I angulo Δ , qui æqualis

qualis est angulo Δ ; quare angulus I æqualis est angulo Δ : angulus vero Θ æqualis est angulo Z , qui æqualis est angulo Γ ; adeoque angulus Θ æqualis est angulo Γ . Et quoniam angulus Γ exterior trianguli $\Theta K \Gamma$ æqualis est interiori & opposito angulo Θ , erunt (per *decimam hujus*) arcus $\Theta K, K \Gamma$ simul sumpti æquales semicirculo: pariterque cum angulus I exterior trianguli $\Delta I K$ æqualis sit opposito & interiori angulo Δ , erunt quoque duo arcus $\Delta K, K I$ æquales semicirculo; ac proinde duo arcus $K \Theta, K \Gamma$ sunt æquales duobus arcibus $I K, K A$. Auferrantur utrinque duo arcus communes $I K, K \Gamma$, ac reliquus arcus ΘI erit æqualis arcui $A \Gamma$. Sed arcus ΘI æqualis est arcui $Z \Delta$; quare arcus $Z \Delta$ æqualis est arcui $A \Gamma$: & angulus A æqualis est angulo Δ , uti angulus Γ angulo Z : quapropter (per *14^m hujus*) arcus $A B$ æqualis est arcui ΔB , & $B \Gamma$ arcui $B Z$. Quod erat demonstrandum.



PROP. XVIII. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius, quemque relativo suo; reliquum vero angulum unius majorem reliquo alterius: erit arcus subtendens majorem angulum major subtendente minorem. Si vero fuerit unus reliquorum arcuum unius trianguli, una cum relativo suo in altero, æqualis semicirculo; erit arcus reliquus in uno æqualis arcui relativo in altero. Si vero fuerint majores semicirculo; erit arcus reliquus trianguli, cujus angulus minor est, major arcu relativo trianguli alterius. At si fuerint minores semicirculo, minor erit eodem.

Sint duo triangula Sphærica $A B \Gamma, \Delta E Z$, in quibus angulus B æqualis sit angulo Δ , & angulus Γ angulo Z ; angulus autem E excedat angulum A : dico quod arcus $Z \Delta$ major est arcu $B \Gamma$. Ac si arcus $A \Gamma$ una cum relativo suo $E Z$ simul sumpto

fit æqualis semicirculo, erit arcus AB æqualis arcui ΔE . Quod si fuerint AF , EZ simpl. majores semicirculo, erit arcus AB major quam ΔE . Si vero AF , EZ minores sint semicirculo, erit etiam arcus AB minor arcui ΔE .

Producatur AF ad Θ , ita ut $\Gamma\Theta$ sit æqualis ipsi EZ ; atque etiam BF ad I , ita ut ΓI sit æqualis arcui ΔZ ; & describatur ΘI arcus circuli magni: ac manifestum est eum æqualem esse arcui ΔE , ob angulum Z æqualem angulo Γ .

Sint jam arcus AF , EZ æquales semicirculo, adeoque arcus $AF\Theta$ erit semicirculus; quare si producatur arcus AB transibit per Θ . Ducatur ille, sitque arcus $B\Theta$.

Itaque quoniam angulus I æqualis est angulo Δ , & angulus Δ æqualis est angulo B , erit angulus I æqualis angulo B . Est autem angulus B , exterior trianguli $B\Theta I$, æqualis interiori & opposito angulo I ; quare duo arcus $B\Theta$, ΘI æquales sunt semicirculo. Sed arcus $AB\Theta$ semicirculus est; quare arcus $AB\Theta$ æqualis est utrisque $B\Theta$, ΘI ; & sublato communi arcui $B\Theta$, reliquus AB æqualis erit reliquo ΘI . Est autem ΘI ipsi ΔE æqualis; quare arcus AB æqualis est arcui ΔE .

Dico insuper arcum ΔZ majorem esse arcu $B\Gamma$. Etenim angulus $\Gamma\Theta I$ æqualis est angulo E , & angulus E major est angulo A ; quare angulus $\Gamma\Theta I$ major est angulo A . Constituatur (per *1^{am} huj.*) ad punctum Θ in arcu ΘI angulus $\Gamma\Theta K$ æqualis angulo A . Cumque angulus I , per nuper demonstrata, æqualis sit angulo B , & angulus $\Gamma\Theta K$ æqualis angulo A , ac duo arcus, super quos sunt æquales anguli, æquales; erunt arcus reliqui æquales arcibus reliquis, quique relativo suo; ac proinde arcus KI æqualis erit arcui ΓB . Arcus vero ΓI major est arcu KI , & ΓI æqualis est arcui ΔZ ; quapropter ΔZ major erit arcu ΓB .

Rursus sint AF , ZE simul sumpti minores semicirculo: dico AB esse minorem quam ΔE .

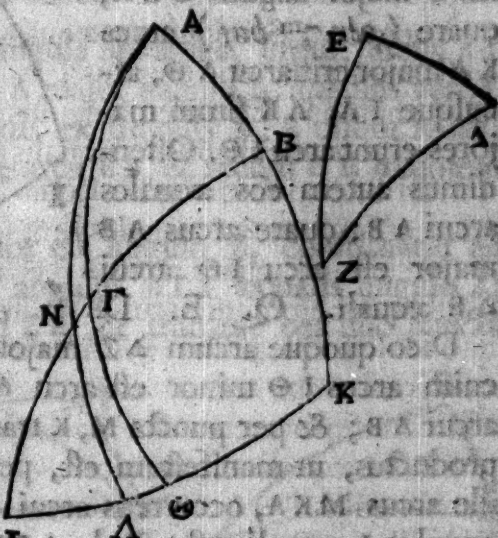
Producantur arcus $\Gamma\Theta$, ΓI , eo quo fecimus modo in precedenti figura, & ducatur ΘI arcus circuli magni. Quoniam vero ar-



cus $\Lambda\Gamma$, EZ simul minores sunt semicirculo, & EZ æqualis est ipsi $\Gamma\Theta$, erit arcus $\Lambda\Gamma\Theta$ minor semicirculo. Cumque hic arcus ΛB productus transsit ultra punctum Θ , producantur ΛB , ΘI ad occursum in puncto K . Demonstratum autem est in præcedentibus angulum B æqualem esse angulo I , quare (per 10^m. hujus) BK , KI æquales sunt semicirculo. Quoniam vero angulus $\Gamma\Theta I$ æqualis est angulo B , qui major est angulo A , erit angulus $\Gamma\Theta I$ major angulo A ; ac proinde duo arcus ΛK , $K\Theta$ minores erunt semicirculo: quare duo arcus BK , KI majores sunt duobus ΛK , $K\Theta$: & sublati communibus arcubus BK , $K\Theta$, erit reliquus arcus ΛB minor arcu $I\Theta$ ipsi ΔE æquali; quapropter arcus ΛB minor erit arcu ΔE .

Dico præterea quod arcus ΔZ major est arcu $B\Gamma$. Capiatur enim in arcu $I\Theta$, quem ostendimus majorem arcu ΛB , arcus æqualis ipsi ΛB ; sitque arcus ille $I\Lambda$, & ducatur $\Lambda\Lambda$ arcus circuli magni, occurrens arcui $I\Gamma B$

in puncto N . Jam quoniam arcus $I\Lambda$ æqualis est arcui ΛB , si ponamus duos arcus BK , $K\Lambda$ communes, manifestum est duos arcus ΛK , $K\Lambda$ æquales esse duobus BK , KI , qui æquales sunt semicirculo; quare duo arcus ΛK , $K\Lambda$ sunt æquales semicirculo, atque adeo angulus exterior $\Lambda\Lambda I$, in triangulo $\Lambda K\Lambda$, æqualis est angulo opposito & interiori $K\Lambda\Lambda$. Ostensus autem



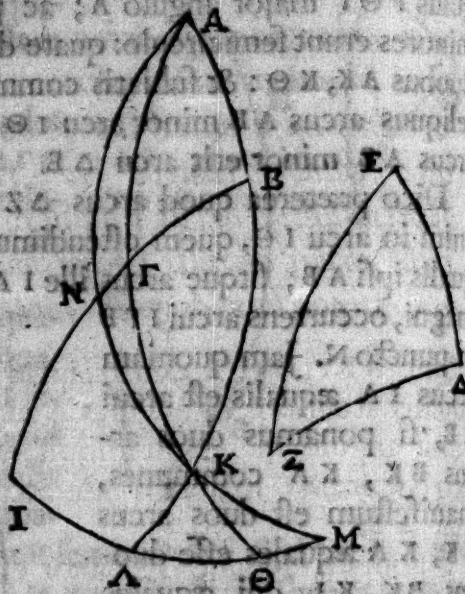
est angulus I æqualis ipsi $\Lambda B\Gamma$, arcusque super quos sunt anguli æquales in duobus triangulis $\Lambda B N$, $\Lambda N I$, nempe arcus ΛB , ΛI , sunt æquales; quare (per 14^m hujus) arcus reliqui æquales erunt arcubus reliquis: ideo $I N$ æqualis erit ipsi $B N$, ac proinde arcus $I\Gamma$ major erit arcu $B\Gamma$. Sed arcus $I\Gamma$ æqualis est arcui ΔZ , adeoque arcus ΔZ major est arcu $B\Gamma$. Q. E. D.

Porro sint arcus $\Lambda\Gamma$, EZ simul sumpti majores semicirculo: dico ΛB majorem esse arcu ΔE .

Producantur arcus ΓI , $\Gamma\Theta$, ut in præcedentibus, & describatur arcus circuli magni $I\Theta$. Quoniam autem duo arcus

$\Lambda\Gamma$,

AT , EZ excedunt semicirculum, & EZ æqualis est ipsi $ΓΘ$; erit arcus $ATΘ$ major semicirculo. Cumque arcus AB productus occurrat arcui $ΓΘ$ citra punctum $Θ$, producat AB usque dum occurrat arcui $IΘ$ in $Λ$, & arcui $ATΘ$ in K ; & ob angulum $ABΓ$ æqualem angulo $ΓIΘ$, erunt (per 10^m *hujus*) duo arcus BA , AI æquales semicirculo. Sed arcus ABK est semicirculus, quare duo arcus BA , AI æquales sunt arcui ABK ; & sublato communi arcu BK , erit reliquus arcus AB æqualis arcibus KA , AI . Et quoniam angulus $Θ$, qui æqualis est angulo B (*ex hypothesis*) major est angulo A , & angulus A æqualis est angulo E ; erit angulus $Θ$ major angulo $ΘKA$, quare (per 7^m *hujus*) arcus KA major erit arcu AO , arcusque IA , AK simul majores erunt arcui $IΘ$. Ostendimus autem eos æquales arcui AB ; quare arcus AB major est arcui $IΘ$ arcui AE æquali. Q. E. D.



Dico quoque arcum $ΔZ$ majorem esse arcu BF . Quoniam enim arcus $IΘ$ minor est arcu AB , fiat arcus $IΘM$ æqualis arcui AB ; & per puncta M , K transeat arcus circuli magni, qui productus, ut manifestum est, perveniet ad punctum A . Sit ille arcus MKA , occurrens arcui BI in puncto N . Cumque angulus I æqualis est angulo $ABΓ$, erunt duo arcus BA , AI æquales semicirculo; & arcus ABK est semicirculus, quare arcus ABK æqualis est utrisque BA , AI : & ablato arcu communi BK , erit reliquus arcus AB æqualis duobus arcibus KA , AI . Arcus autem AB æqualis est arcui $IΘM$; quare arcus IA , AK simul æquales sunt arcui $IΘM$. Auferatur utrinque arcus IA , & reliquus arcus AK æqualis erit arcui AM , unde (per 2^{dum} *hujus*) angulus M æqualis erit angulo AKM , hoc est angulo BAN : quare angulus BAN æqualis est angulo M , & arcus AB æqualis est arcui IM , super quos sunt anguli æquales; quare (per 14^m *hujus*) arcus reliqui æquales erunt arcibus reliquis.

liquis, quisque relativo suo: arcus itaque IN æqualis est arcui BN ; adeoque arcus IG , cui æqualis est arcus ΔZ , major erit arcu BG . Q. E. D.

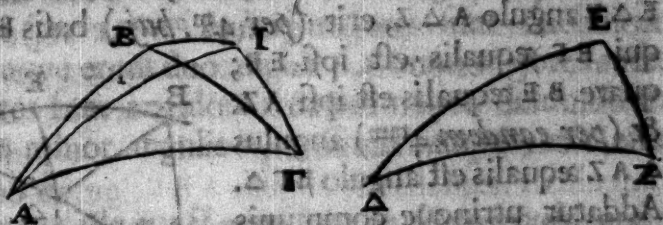
Hanc etiam Propositionem in tres dividunt Arabes, ita ut sequens XIX^{ma} apud eos sit Prop. XXII. Unica vero est tam in Coll. Hebræis quam Maurolyco.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo triangula Sphærica habeant unum ex arcibus unius æqualem arcui alterius; anguli autem æqualibus arcibus adjacentes ita se habeant, ut alter major sit, alter minor relativo suo; reliqui vero anguli, quibus subtenduntur arcus æquales, non minores sunt recto: erunt arcus angulis majoribus subtensi majores arcibus qui minoribus angulis subtenduntur.

Sint ABG , ΔEZ duo triangula Sphærica, sitque arcus AG æqualis arcui ΔZ , & angulus A major angulo Δ , angulus vero G minor angulo Z , nec sit aliquis ex angulis B , E minor recto; dico arcum BG majorem esse arcu EZ , & arcum ΔE majorem arcu AB .

Quoniam angulus G minor est angulo Z , constitutur ad punctum G super arcum AG angulus AGI æqualis angulo Z ; & fiat arcus GI æqualis arcui ZE , & transeat per duo puncta A, I arcus circuli magni AI . Jam quia duo anguli duorum triangulorum $\Delta ZE, AGI$ sunt æquales, nempe anguli



$AGI, \Delta ZE$; arcusque eisdem continentes, nempe arcus AG ipsi ΔZ , & GI ipsi ZE æquales: erit (per 4^{am} hujus) arcus quoque AI æqualis arcui ΔE , & angulus AIG angulo ΔEZ . Quoniam autem anguli $\Delta EZ, ABG$ non sunt minores recto, si ducatur arcus circuli magni BI , necesse est angulos GBI, AIB minores esse recto; ac propterea angulus ABI major erit angulo AIB : unde (per 7^{am} hujus) arcus AI major erit arcu AB . Pariter angulus GIB major est angulo GBI , adeoque & arcus GB major erit arcu GI . Sed arcus AI æqualis est arcui ΔE ,

ΔE ; quare arcus ΔB major erit arcu ΔB . Arcus autem ΓI equalis est arcui $E Z$; ac propterea arcus ΓB excedet arcum $Z B$. Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si aliquis angelus equalis fuerit duobus reliquis simul sumptis, ac à majori angulo educatur arcus circuli magni, bifariam dividens arcum angulo illi subtensum; erit arcus ille eductus equalis dimidio lateris oppositi. Ac si fuerit angelus ille major duobus reliquis, erit arcus eductus minor dimidio basis. Si vero minor fuerit duobus illis, tum major erit arcus ille dimidia basis.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, cujus angelus B equalis sit duobus reliquis angelis A, Γ ; & dividatur arcus $A\Gamma$ bifariam in Δ , & per puncta B, Δ ducatur arcus circuli magni $B\Delta$; dico arcum $B\Delta$ æqualem esse arcui $A\Delta$ vel $\Delta\Gamma$.

Dividatur arcus $B\Gamma$ bifariam in E , & per E, Δ transeat arcus circuli magni $E\Delta$, qui producat. ad Z , ita ut ΔZ sit equalis ipsi $E\Delta$; & ducatur arcus circuli magni AZ , qui productus occurrat arcui $B\Gamma$ etiam producto in puncto I .

Quoniam arcus $E\Delta, \Delta Z$; $A\Delta, \Delta\Gamma$ sunt æquales, uti angelus $E\Delta\Gamma$ angulo $A\Delta Z$, erit (per 4^m. huj.) basis $E\Gamma$ æqualis basi AZ , qui $E\Gamma$ æqualis est ipsi EB ; quare BE æqualis est ipsi AZ ; & (per eandem 4^{am}) angelus ΔAZ æqualis est angulo $E\Gamma\Delta$. Addatur utrinque communis angelus $B\Delta\Delta$; & erunt duo anguli $B\Delta\Gamma, B\Gamma\Delta$, hoc est (ex hypoth.) angelus $AB\Gamma$, æquales angulo $B\Delta I$; quare (per 2^m hujus) arcus ΔI æqualis est arcui $B I$. Ostenfus autem est arcus BE æqualis arcui AZ , adeoque reliquus arcus $E I$ æqualis est reliquo $I Z$; unde & angelus $I Z E$ æqualis est angulo $I E Z$; & angelus $A Z B$ æqualis angulo $Z B E$, hoc est $A Z \Delta$ angulo $\Delta E B$. Sed angelus $A Z \Delta$ æqualis est angulo $\Delta E \Gamma$; æquales igitur sunt anguli $\Delta E B, \Delta E \Gamma$;



$\Delta E F$; arcus autem $B E$ aequalis est ipsi $E F$, & est arcus $E \Delta$ communis utrique triangulo; quare arcus $E \Delta$ aequalis est arcui $B \Delta$; $F \Delta$ vero semissis est arcus $A \Gamma$; adeoque $B \Delta$ aequalis est semissi arcus $A \Gamma$. *Quod si*

Quod si angulus $A B \Gamma$ major fuerit duobus reliquis angulis: dico $B \Delta$ minorem esse quam $\Delta \Gamma$. Eodem etenim argumento probabitur angulum $Z A \Delta$ aequalem esse angulo $\Delta E F$; ac si adjiciatur angulus $B A F$ communis, manifestum est angulum $B A Z$ qui aequalis est utrisque $B A \Delta$, $B \Gamma \Delta$ simul, minorem esse angulo $A B \Gamma$; ac proinde angulus $A B \Gamma$ major est angulo $B A Z$; unde arcus $A I$ excedet arcum $B I$. Est autem $B E$ aequalis arcui $A Z$, quare reliquus arcus $Z I$ major est reliquo $B I$, ac propterea angulus $Z E I$ major angulo $E Z I$; adeoque angulus $A Z \Delta$ major est angulo $B E \Delta$: sed angulus $\Delta E \Gamma$ aequalis est angulo $A Z \Delta$; quare angulus $\Delta E \Gamma$ major est angulo $B E \Delta$, & arcus $B E$ aequalis est arcui $E \Gamma$, & arcus $E \Delta$ communis; quare arcus $\Delta \Gamma$ excedit arcum ΔB . Sed $\Delta \Gamma$ semissis est arcus $A \Gamma$; constat itaque propositum, nempe quod si duo reliqui anguli trianguli $A B \Gamma$ minores fuerint angulo B , arcus eductus ab angulo B ad bisectionem lateris eidem subtensi minor erit dimidio ejus.

Ac pari processu demonstraberis quod, si trianguli $A B \Gamma$ angulus B minor fuerit duobus angulis A, Γ , erit arcus $B \Delta$ major arcu $\Delta \Gamma$; hoc est dimidio ipsius $A \Gamma$.

Dico etiam quod, si angulus B non fuerit major recto, arcus $B \Delta$ major erit arcu $\Delta \Gamma$. Etenim tres anguli cujuscunque trianguli Sphaerici (per 11^{am} hujus) majores sunt duobus angulis rectis; adeoque erunt duo anguli A, Γ simul majores recto; ac proinde majores sunt angulo B ; & per ruper demonstrata, si fuerit angulus B minor angulis A, Γ simul sumptis, erit arcus $B \Delta$ major arcu $\Delta \Gamma$.

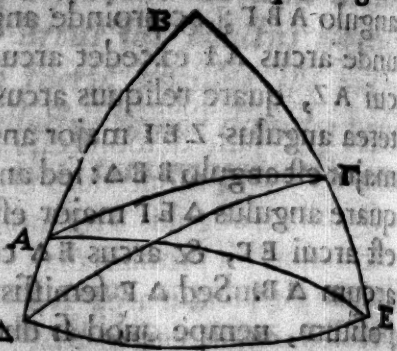
Coroll. Hinc manifestum est angulum in semicirculo, qui in plano rectus est, in superficie Sphaerae semper majorem esse recto. In hoc autem continemus, quod angulus ille sit ubique aequalis duobus reliquis trianguli inscripti angulis simul sumptis.

P R O P. XXI.

In omni triangulo Sphaerico, si angulus aliquis, non minor recto, continentur sub arcibus quorum uterque sit minor quadrante: erit uterque angulus reliquus obtusus.

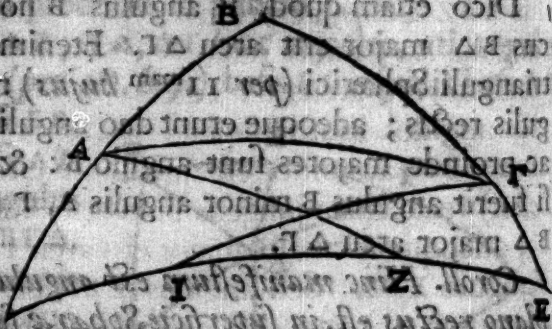
△ Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, sitque angulus ejus B non minor recto, arcus vero AB , $B\Gamma$ sint minores quarta circuli: dico utrumque angulum A , Γ minorem esse angulo recto.

Quoniam enim uterque arcus BA , BC minor est quadrante; fiant arcus $BA\Delta$, $BC\epsilon$ circuli quadrantes; &c. ducatur ΔB arcus circuli magni. Jam quoniam angulus B non est minor recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ac ducantur arcus circulorum magnorum $\Delta\Gamma$, $A\epsilon$; manifestum est utrumque arcum circuli quadrantem esse; adeoque angulus exterior $\Delta\Gamma B$ trianguli $\Delta\Gamma\epsilon$ æqualis est angulo eidem opposito, nempe angulo ϵ . Angulus autem ϵ rectus est; quare angulus $\Delta\Gamma B$ est etiam rectus: atque adeo angulus $A\Gamma B$ est minor recto. Pari modo constabit angulum ΓAB esse minorem recto.



Quod si angulus B major fuerit recto, erit arcus ΔB major quadrante; arcus vero $B\Gamma\epsilon$, $BA\Delta$ sunt quadrantes: quare punctum B polus est arcus $\Delta\epsilon$, atque angulus Δ est rectus (sicat enim arcus BA arcum $\Delta\epsilon$ ad angulos rectos, quia transit per polos ejus.) Fiat igitur arcus ΔZ quadrans circuli, &c. erit punctum Z polus arcus ΔB . Pariter quæ si fiat ϵI quadrans, erit punctum

I polus arcus $B\Gamma\epsilon$. Ducantur de punctis Z , I arcus circulorum magnorum AZ , ΓI ; ac manifestum est eos esse circuli quadrantes: quapropter duo arcus AZ , $Z\Gamma$ simul sunt æquales semicirculo; ac proinde angulus exterior $Z\Gamma B$ æqualis erit angulo Δ eidem opposito, atque ideo rectus. Angulus igitur ΓAB minor est recto. Nec absimili modo constabit angulum $A\Gamma B$ minorem esse recto. Q. E. D.



PROP. XXII. THEOR.

In omni triangulo Sphærico, si aliquis ex angulis non fuerit

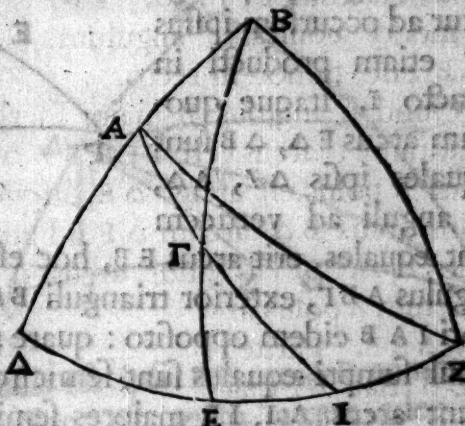
erit minor recto, ac uterque arcuum alium quemlibet angulum continentium fuerit minor quadrante: erit latus reliquum quadrante minus, & quilibet reliquorum angulorum acutus.

In triangulo sphærico $AB\Gamma$ sit angulus A non minor recto, arcus autem AB , $B\Gamma$ sint quadrante circuli minores: dico arcum $A\Gamma$ minorem esse quadrante circuli, & utrumque angulum B , Γ minorem esse recto.

Quoniam duo arcus AB , $B\Gamma$ sunt minores quadrantibus, producantur AB ad Δ & $B\Gamma$ ad E , ita ut $B\Delta$, BE sint quadrantes; & per puncta Δ , E describatur arcus circuli magni, cuius polus, per jam demonstrata, est punctum B : & producantur arcus $A\Gamma$, ΔE usque dum conveniant in puncto I .

Quoniam angulus $B\Gamma$ non est minor recto, erit vel rectus vel recto maior. Sit primum maior recto, & ducatur arcus AZ ad rectos angulos arcui $B\Delta$, qui occurrat $\Delta B I$ producto in puncto Z : quapropter Z erit polus arcus $B\Delta$. Per puncta B , Z , transeat arcus circuli magni BZ , & erit angulus ABZ rectus, ac proinde angulus $AB\Gamma$ minor recto. Quoniam vero arcus $E I$ ad rectos angulos insistit super arcum $B\Gamma E$, ac minor est quadrante circuli; erit (per I^m III. Theod.) recta linea jungens puncta I , E minor jungente puncta I , Γ ; adeoque arcus $I\Gamma$ major erit arcu IE , & angulus $\Gamma E I$ maior angulo $E\Gamma I$. Sed angulus $\Gamma E I$ est rectus, quare angulus $E\Gamma I$ minor est recto. Est autem angulus $A\Gamma B$ æqualis angulo $E\Gamma I$; quare angulus $A\Gamma B$ minor est recto. Demonstravimus itaque utrumque angulum B , Γ esse minorem recto. Quoniam vero arcus $A\Delta$ insistit ad angulos rectos super ipsum $\Delta E I$, erit iuncta recta linea $A I$ minor jungente puncta A , Z ; ac propterea arcus AZ maior arcu $A I$. Est autem AZ quadrans, quare arcus $A I$, & multo magis arcus $A\Gamma$, minor erit quadrante.

Quod si angulus A sit rectus, manifestum est punctum I devenire polum arcus ΔAB ; adeoque (per præced.) utrumque angulum



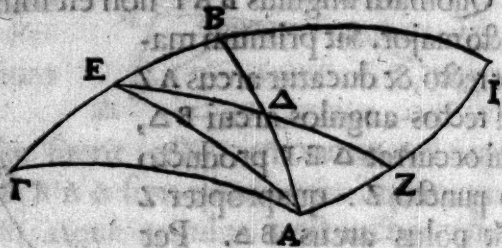
gulum E, Γ minorem esse recto. Arcus autem AT est circuli quadrans; arcus igitur $A\Gamma$ minor erit quadrante. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo qualibet latera dividantur bifariam; erit arcus circuli magni connectens puncta bisectionum major dimidio reliqui lateris.

Trianguli Sphærici $AB\Gamma$ dividantur latera $AB, B\Gamma$ bifariam in punctis Δ, E ; & per Δ, E transeat arcus circuli magni: dico arcum ΔE maiorem esse dimidio lateris $A\Gamma$.

Producatur arcus ΔE ad Z , usque dum ΔZ fuerit æqualis ipsi ΔB ; & ducatur AZ arcus circuli magni, qui producatur ad occursum ipsius $B\Gamma$ etiam producti in puncto I . Itaque quoniam arcus $E\Delta, \Delta B$ sunt æquales ipsis $\Delta Z, \Delta A$, & anguli ad verticem sunt æquales, erit arcus EB , hoc est $E\Gamma$, arcui AZ æqualis; & angulus $AB\Gamma$, exterior trianguli BAI , æqualis erit angulo interiori IAB eidem opposito: quare (per 10^m hujus) arcus AI, IB simul sumpti æquales sunt semicirculo. Adjiciatur arcus BE , & erunt arcus AI, IE majores semicirculo. Ducatur AB arcus circuli magni, & erit angulus ΓEA (per eandem 10^m) minor angulo EAZ . Sunt autem arcus $\Gamma E, EA$ æquales arcibus EA, AZ , singuli singulis; quare (per 8^m hujus) arcus ZE major erit arcu ΓA . Sed ΔE semissis est arcus ZE ; quare arcus ΔE major est semisse ipsius $A\Gamma$. Q. E. D.



PROP. XXIV. THEOR.

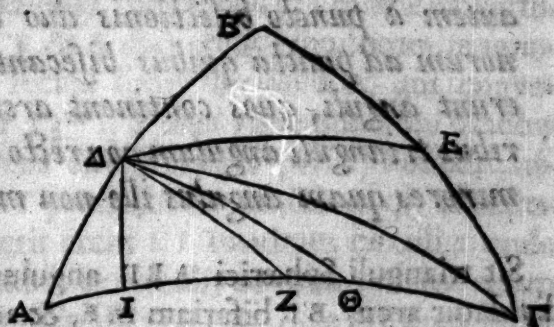
Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividantur latera eundem continentia bifariam; ducatur autem per puncta bisectionum arcus circuli magni: erunt anguli, sub ducto arcu & bisectis lateribus contenti, & respectu anguli non recto minoris interiores, minores angulis

angulis ipsius trianguli; nempe unusquisque relativo suo ad idem latus constituto minor.

Trianguli Sphærici $\triangle B\Gamma$ sit angulus B non minor recto, & dividantur arcus AB , $B\Gamma$ bifariam in punctis Δ , E ; & ducatur arcus circuli magni ΔE : dico angulum $B\Delta E$ minorem esse angulo $B\Gamma$, & angulum $B\Delta A$ minorem angulo $B\Gamma A$.

Quoniam arcus AB , $B\Gamma$ sunt latera trianguli Sphærici, minores erunt semicirculo (*per def. 2^m*.) Est autem $B\Delta$ dimidium ipsius AB , & BE dimidium ipsius $B\Gamma$: quare uterque $B\Delta$, BE minor est quartâ circuli; & angulus B non minor est recto; quare (*per 22^m huj.*) erit uterque angulorum $B\Delta E$, $B\Delta A$ minor recto. Jam si neuter angulorum A , Γ minor fuerit recto, manifestum est angulum $B\Delta E$ acutum minorem esse angulo A obtuso, & angulum $B\Delta A$ minorem angulo Γ .

Quod si fuerit uterque angulus A , Γ minor recto: dico etiam angulum $B\Delta A$ minorem esse angulo Γ , & $B\Delta E$ minorem angulo A .



Dividatur enim arcus $A\Gamma$ bifariam in Z , ac ducantur arcus circulorum magnorum ΔZ , $\Gamma\Delta$. Jam quoniam BE æqualis est ipsi $B\Gamma$, ac ΔE communis est, atque angulus $\Delta B E$ minor est recto, atque adeo minor angulo $\Delta E \Gamma$; erit (*per 8^m hujus*) arcus $B\Delta$, hoc est ΔA , minor arcu $\Delta \Gamma$. Angulus autem $A Z \Delta$ minor est angulo $\Delta Z \Gamma$; quare angulus $\Delta Z A$ est minor recto, atque angulus A est etiam minor recto; quare duo anguli Z , A super arcum $A Z$ constituti sunt singuli minores recto: quapropter arcus circuli magni, de puncto Δ ad angulos rectos super arcum $A\Gamma$ demissus, occurreret arcui $A Z$. Sit ille arcus ΔI . Cumque angulus $A I \Delta$ rectus, est, atque angulus A acutus, erit arcus $A\Delta$ major arcu ΔI . Sed arcus $A\Delta$ minor est quadrante, quare arcus ΔI est etiam minor quadrante. Quoniam vero ΔI est ad angulos rectos super arcum $A\Gamma$, & minor est quadrante, erit (*per 1^{am} III. Theod.*) recta jungens puncta Δ , I minor quavis alia de Δ ad arcum $A\Gamma$ prodeunte, eisdemque propior minor erit remotiore. Sed

arcus

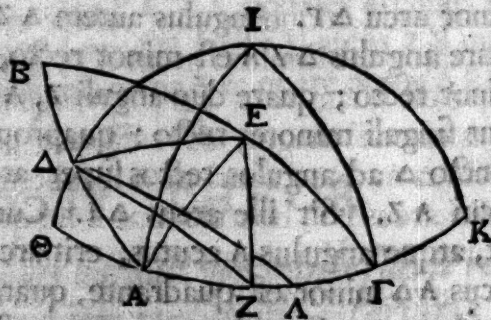
arcus ΔE major est dimidio ipsius $A\Gamma$, ut demonstratum est in præcedente 23^{ia}; quare ΔE major est quam AZ : ac si fiat $A\Theta$ ipsi ΔB æqualis, & ducatur $\Delta \Theta$ arcus circuli magni; erit $\Delta \Theta$ major quam ΔZ . Verum ΔZ (per 23^m hujus) est major dimidio ipsius $B\Gamma$, hoc est arcu BE ; quare $\Delta \Theta$ major est quam BE . Est autem $A\Delta$ æqualis ipsi ΔB , uti & $A\Theta$ ipsi ΔB ; basis vero $\Delta \Theta$ major est basi EB ; quare angulus $\Delta A\Theta$ major est angulo $B\Delta E$. Pari argumento probabitur angulum $E\Gamma A$ maiorem esse angulo $BE\Delta$. Ostendimus itaque angulum $B\Delta E$ minorem esse angulo A , angulumque ΔEB minorem angulo Γ . Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

Si trianguli Sphærici aliquis angulus non minor fuerit recto, ac dividatur latus eidem oppositum bifariam; ducantur autem à puncto bisectionis duo arcus circulorum magnorum ad puncta quibus bisecantur reliqua duo latera: erunt anguli, quos continent arcus sic ducti cum lateribus trianguli angulum non recto minorem continentibus, minores quam angulus ille non minor recto.

Sit trianguli Sphærici $AB\Gamma$ angulus A non recto minor, ac dividatur arcus $B\Gamma$ bifariam in E , & ad puncta media arcuum AB , $A\Gamma$ ducantur arcus circulorum magnorum EA , $E\Gamma$. Dico utrumque angulum $B\Delta E$, $E\Gamma A$ minorem esse angulo A .

Quoniam angulus A non minor est recto, vel erit rectus, vel recto major. Si vero fuerit rectus, ostendimus (Prop. 11^{ma} huj.) tres angulos omnis Sphærici trianguli majores esse duobus rectis; quare duo anguli B , Γ majores sunt angulo A : ac ducto AE arcu circuli magni, constat, (exdemonstratis in Prop. 20.) arcum AE maiorem esse dimidio ipsius $B\Gamma$, hoc est, quam BE vel ΓE . Sed $A\Delta$ æqualis est ipsi ΔB , & AE est communis, basis autem AE major est base EB : quare (per 8^m huj.) angulus



$\angle B \Delta E$ minor est angulo $\angle A \Delta E$, atque ideo minor recto. Quapropter angulus ille minor erit angulo $\angle B A \Gamma$, recto scilicet. Pariterque angulus $\angle E Z \Gamma$ minor erit angulo $\angle B A \Gamma$.

Quod si angulus A major fuerit recto, angulus autem $\angle B \Delta E$ minor sit recto, res manifesta est: nempe quod acutus minor est obtuso $\angle B A \Gamma$. Sit autem angulus $\angle B \Delta E$ major recto: dico quoque illum minorem esse angulo $\angle B A \Gamma$. Quoniam enim uterque arcus $B \Delta$, $B E$ minor est quadrante, atque angulus $\angle B \Delta E$ major est recto; erit (per 22^m hujus) angulus $\angle B B E$ minor recto. Est autem $B \Delta$ æqualis ipsi ΔA , & ΔE est communis, atque angulus $\angle B \Delta E$ major est angulo $\angle A \Delta E$; quare (per 8^m hujus) arcus $B B$ major est arcu $E A$. Cumque $B B$ æqualis sit ipsi $E \Gamma$, arcus $E \Gamma$ major erit quam $E A$. Cum autem arcus ΓZ æqualis sit ipsi $Z A$, & $E Z$ communis; erit (per 8^m hujus) angulus $\angle E Z \Gamma$ major angulo recto. Arcus autem $E \Gamma$, ΓZ singuli minores sunt quadrantibus; quare (per 22^m hujus) angulus $\angle E \Gamma A$ minor est recto. Constituantur ad puncta Γ & A duo arcus circulorum magnorum $A I$, ΓI ad angulos rectos super arcum $A \Gamma$, qui conveniant in puncto I ; & (per 13^m l. Theod.) erit punctum I polus arcus $A \Gamma$. Producatur arcus circuli magni per Δ , I ductus, usque dum occurrat arcui $A \Gamma$ producto in punctis Θ , K , ab utroque latere puncti Δ ; & erit arcus $K I$ quadrans circuli: unde arcus $K I \Delta$ major erit quadrante circuli, ac multo major quam $\Delta \Theta$. Jam super diametrum circuli $\Theta A \Gamma K$, quæ est linea recta jungens puncta Θ , K , insistit ad angulos rectos semicirculus $\Theta \Delta K$, divisus ad Δ in portiones inæquales, quarum minor est arcus $\Delta \Theta$: recta igitur jungens puncta Δ , Θ (per 1^m III. Theod.) minor erit quavis aliâ rectâ de puncto Δ ad arcum $\Theta \Gamma K$ prodeunte, eidemque propior minor erit remotiore. Arcus autem $E A$ major est dimidio arcus $A \Gamma$, hoc est arcu $A Z$; quare $E A$ major est quam $A Z$. Fiat $A A$ æqualis ipsi $B \Delta$, & ducatur ΔA arcus circuli magni, & recta quæ prodit de Δ ad Z minor erit iunctâ ΔA . Recta autem ΔZ subtendit arcum ΔZ majorem dimidio arcus $B \Gamma$, hoc est arcu $B E$; quare arcus ΔA multo major est arcu $B E$. Verum arcus $B \Delta$ æqualis est arcui ΔA , & ΔB ipsi $A A$; arcus autem $B E$ minor est arcu ΔA : quare (per 8^m hujus) angulus $\angle B \Delta E$ minor est angulo $\angle B A \Gamma$. Pari argumento probabitur angulum $\angle E Z \Gamma$ minorem esse angulo $\angle B A \Gamma$. Q. E. D.

P R O P.

PROP. XXVI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo quævis latera simul sumpta fuerint semicirculo æqualia; ac ab angulo sub iisdem contento ad latus reliquum ducatur arcus circuli magni dividens angulum illum bifariam: dividet ille arcus latus reliquum bifariam. Ac si dividat latus reliquum bifariam; erit quoque angulus bisectus, & erit arcus eductus circuli quadrans.

Sit $AB\Gamma$ triangulum Sphæricum, cuius duo latera $AB, B\Gamma$ simul sumpta sint æqualia semicirculo; & ex angulo B prodeat ad arcum $A\Gamma$ arcus circuli magni BD : dico quod, si fuerit angulus ABD æqualis angulo $DB\Gamma$, arcus quoque AD æqualis erit arcui $D\Gamma$. Ac si fuerit AD æqualis arcui $D\Gamma$, erit angulus ABD æqualis angulo $DB\Gamma$, atque insuper arcus BD erit circuli quadrans.

Producantur arcus $AB, BD, B\Gamma$, ac manifestum est eos concurrere in eodem puncto, quod sit E . Quoniam vero $AB, B\Gamma$ sunt æquales semicirculo, erit (per 10^m hujus) angulus $A\Gamma E$ æqualis angulo $B A \Delta$. Patet quoque $B\Gamma$ æqualem esse ipsi AB , uti AB ipsi $B\Gamma$; & angulus ABD æqualis est angulo $DB\Gamma$, & latera apud quos sunt æquales illi anguli, nempe $AB, B\Gamma$, sunt æqualia: quare (per 14^m hujus) duo arcus reliqui sunt æquales duobus reliquis respective. Arcus igitur AD æqualis est arcui $D\Gamma$, & BD arcui $D\Gamma$. Sed BE est semicirculus, adeoque BD est quadrans circuli.

Quod si ponatur AD ipsi $D\Gamma$ æqualis; dico angulum ABD æqualem esse angulo $DB\Gamma$, & BD esse circuli quadrantem. Est enim angulus $A\Gamma E$ æqualis angulo $B A \Delta$, & AD æqualis est ipsi $D\Gamma$, uti AB ipsi $B\Gamma$; quare (per 4^m hujus) arcus BD æqualis est arcui $D\Gamma$; & angulus ABD angulo $DB\Gamma$, hoc est angulo $DB\Gamma$. Arcus autem BE est semicirculus, & BD dimidium est ipsius BE ; quare BD est circuli quadrans. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXVII THEOR.

Si in triangulo Sphaerico duo latera simul sumpta aequalia fuerint semicirculo, & ab angulo sub iisdem contento cadant in latus reliquum duo alii arcus, cum prioribus lateribus aequales angulos continentes: abscindant hi arcus e reliquo latere portiones aequales. Et e contra, si arcus in latus reliquum cadentes absciderint ab eodem duos arcus aequales: continebunt cum lateribus semicirculo aequalibus angulos aequales, arcusque ipsi in utroque casu erunt semicirculo aequales.

In triangulo Sphaerico $AB\Gamma$ sint arcus AB , $B\Gamma$ simul sumpti aequales semicirculo, & de puncto B prodeant ad arcum $A\Gamma$ duo arcus circulatorum magnorum $B\Delta$, BE , qui contineant cum ipsis AB , $B\Gamma$ angulos aequales $AB\Delta$, $EB\Gamma$: dico quod $\Delta\Delta$ aequalis est ipsi ΓE ; quodque arcus $B\Delta$, BE simul sumpti sunt aequales semicirculo.

Producantur enim arcus AB , ΔB , EB , ΓB ad occursum: ac manifestum est eos occursum esse in eodem puncto.

Occurrant ad I . Cumque arcus AB , $B\Gamma$ sunt semicirculo aequales, erit angulus AGI aequalis angulo $GA\Gamma$: & angulus ABA aequalis est angulo $EB\Gamma$, hoc est angulo ΓIE ; arcus autem IG aequalis est arcui AA , apud quos sunt anguli illi aequales: quapropter (per 14^m hujus) arcus ΓE aequalis est arcui AA , & arcus BI arcui $B\Delta$. Pari modo constabit arcum IA arcui BE esse aequalem: quare arcus $B\Delta$, BE simul aequales erunt arcibus ΔI , IE simul sumptis; ac propterea arcus $B\Delta$, BE simul aequales erunt semicirculo. Q. E. D.

Et converso argumento demonstrabitur, quod, si fuerit arcus AA aequalis arcui $B\Gamma$, angulus ABA aequalis erit angulo $EB\Gamma$; quodque ΔB , BE simul sumpti erunt semicirculo aequales.

E

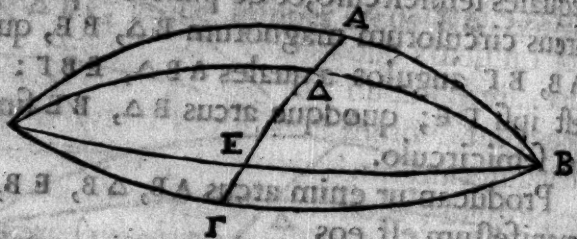
PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera sint inæqualia, & simul sumpta conficiant semicirculum; & ab angulo sub iisdem contento prodeant ad latus reliquum duo alii arcus iisdem semicirculo æquales: continebunt hi arcus cum prioribus angulos æquales, simulque abscindunt ex arcu reliquo portiones æquales.

In triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sint duo arcus AB , $B\Gamma$ inæquales, verum simul semicirculo æquales; ac educantur e puncto B duo alii arcus circulatorum magnorum $B\Delta$, BE , qui simul sint etiam semicirculo æquales: dico angulum $AB\Delta$ æqualem esse angulo ΓBE , arcumque ΓE arcui $A\Delta$.

Quoniam enim AB , $B\Gamma$ sunt æquales semicirculo; erit angulus $E\Gamma I$ æqualis angulo $B\Delta\Delta$; & ob arcus $B\Delta$, BE etiam æquales se-



micirculo, erit angulus $A\Delta B$ æqualis angulo $BE\Delta$, hoc est, angulo $\Gamma E I$. Punctum autem B non est polus arcus $A\Gamma$, quia arcus $B\Gamma$ non est æqualis ipsi BA ; & per jam demonstrata, arcus AB æqualis est arcui ΓI , uti $E I$ arcui $B\Delta$: habent itaque duo triangula $AB\Delta$, $\Gamma I E$ duos angulos unius æquales duobus angulis alterius respective; & æquales sunt inter se arcus reliquos angulos continentes; neque sunt B , I poli arcuum reliquorum $A\Delta$, ΓE ; erit igitur (per 15^m hujus) arcus reliquus arcui reliquo, & angulus reliquus reliquo angulo æqualis; hoc est, arcus ΓE æqualis erit arcui $A\Delta$, & angulus $\Gamma I E$ angulo $AB\Delta$ æqualis. Sed angulus $\Gamma I E$ æqualis est angulo ΓBE ; quare angulus ΓBE æqualis est angulo $AB\Delta$. Q. E. D.

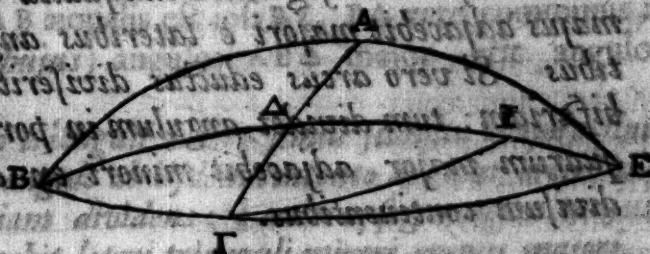
PROP. XXIX. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera simul sumpta fuerint minor semicirculo, sive arcus circuli magni angulum sub

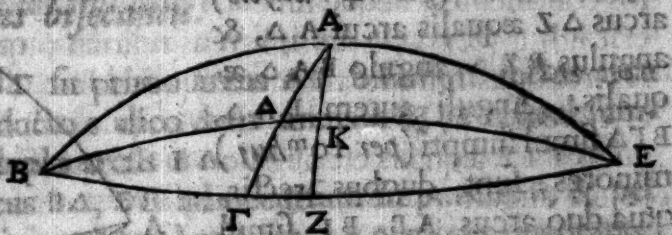
isdem comprehensum bifariam dividerit, sive transferit per medium lateris reliqui: in utroque casu erit arcus ille eductus minor quadrante circuli.

In triangulo Sphaerico $AB\Gamma$ sint duo latera AB , $B\Gamma$ simul sumpta minora semicirculo, & educatur ex angulo B arcus circuli magni $B\Delta$, dividens angulum B bifariam, vel etiam arcum $A\Gamma$: dico quod arcus $B\Delta$ minor est quadrante circuli.

Dividat primo arcus $B\Delta$ arcum $A\Gamma$ bifariam; productisque AB , $B\Gamma$, $B\Delta$, manifestum est eos occurrere in eodem puncto, quod sit E . Cum autem duo arcus AB , $B\Gamma$ sint minores semicirculo, erit angulus $A\Gamma E$ (per 10^m hujus) major angulo ΓAB . Constituitur ad punctum Γ , super arcum ΓA , angulus aequalis angulo ΓAB , puta angulus $\Gamma \Delta I$; angulus autem $\Gamma \Delta I$ aequalis est angulo ad verticem $A \Delta B$, arcusque ΓA aequalis est ipsi $A\Delta$, qui quidem duo sunt arcus apud quos sunt duorum triangulorum anguli aequales inter se: ac propterea (per 14^m hujus) arcus $B\Delta$ aequalis erit ipsi ΔI . Sed ΔI minor est quam ΔB ; quare arcus $B\Gamma$, qui semicirculus est, major erit duplo ipsius $B\Delta$: proinde $B\Delta$ minor erit quadrante circuli.



Secet jam arcus $B\Delta$ angulum B bifariam: dico arcum $B\Delta$ minorem esse quadrante circuli. Quoniam enim duo arcus AB , $B\Gamma$ minores sunt semicirculo, & arcus $B\Gamma E$ est semicirculus; erit ΓE quam AB major. Fiat EZ aequalis ipsi AB , & ducatur arcus circuli magni AZ , occurrens arcui $B\Gamma$ in puncto K inter Δ , E . Sunt autem duo arcus AE , EZ aequales duobus BA , AB ; quare duo arcus AE , EZ sunt aequales semicirculo; ac propterea (per 10^m hujus) angulus exterior trianguli AEZ , nempe angulus BAZ , aequalis est angulo AZE interiori



& eidem opposito: Sed & angulus ABA æqualis est angulo ΔBF , qui æqualis est angulo ZEK : quare (per 14^m hujus) arcus BK æqualis est arcui KE . Est autem arcus BK quadrans circuli, quo minor est arcus $B\Delta$; quare arcus $B\Delta$ minor est quadrate circuli. Q. E. D.

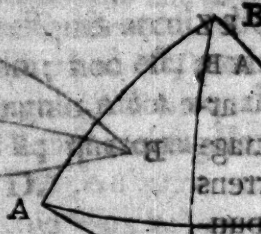
Coroll. Hinc etiam manifestum est, quod, si latera duo trianguli simul sumpta excesserint semicirculum, erit arcus bifariam dividens tum angulum tum latus tertium quadrante major.

PROP. XXX. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, simulque sumpta minora semicirculo: Et ab angulo sub iisdem contento educatur arcus dividens illum bifariam: erit latus reliquum in segmenta inæqualia divisum, quarum majus adjacebit majori è lateribus angulum continentibus. Si vero arcuseductus dividerit latus reliquum bifariam: tum divideret angulum in portiones inæquales, quarum major adjacebit minori ex arcibus angulum divisum continentibus.

Sit trianguli Sphærici ABF majus latus BF : sintque AB , BF simul minores semicirculo: & ducatur arcus $B\Delta$ secans angulum ABF bifariam, & occurrens tertio lateri AF in Δ : dico quod arcus ΔF major est arcu ΔA .

Quoniam BF major est quam AB , fiat BZ ipsi AB æqualis, & ducatur ΔZ arcus circuli magni. Cum autem BZ æqualis est ipsi AB , & $B\Delta$ est communis, angulus vero ZBA angulo ABA æqualis: erit (per 4^m hujus) arcus ΔZ æqualis arcui $A\Delta$, & angulus BZA angulo BAA æqualis. Anguli autem BAA , $BF\Delta$ simul sumpti (per 10^m hujus) minores sunt duobus rectis, quia duo arcus AB , BF simul sumpti sunt minores semicirculo: quare duo anguli BAA , $BF\Delta$ minores sunt angulis BZA , ΔZF duobus rectis æqualibus. Aufertur communis angulus



gulus BZA , hoc est BAA , & restabit angulus AZF major angulo BFA ; adeoque arcus AF major erit arcu AZ . Sed AZ æqualis est arcui AA ; quare AF major est arcu AA . Q. E. D.

Quod si arcus BA dividerit arcum AF in portiones æquales: dico angulum ABA majorem esse angulo ABZ .

Quoniam enim BF major est ipso AB , ponatur BZ æqualis ipsi AB , & ducatur arcus AZ . Jam quia duo anguli FAB , BFA sunt minores duobus rectis, & angulus BAZ æqualis est angulo BZA ; sunt autem duo anguli BZA , ZAF æquales angulo FAB ; erunt tres anguli BZA , ZAF , BFA simul sumpti minores duobus rectis. Verum duo anguli BZA , AZF sunt æquales duobus rectis; quare, sublato communi BZA , erit reliquus angulus AZF major duobus reliquis ZAF , BFA ; ac proinde (per 20^m hujus) erit arcus de puncto Z ad bisectionem arcus AF ductus minor dimidio ipsius AF ; quapropter arcus AZ minor est quam AA , & AB æqualis est ipsi BZ , BA vero communis: proinde (per 8^m hujus) angulus ABA major erit angulo ABZ . Q. E. D.

Coroll. 1. Si vero trianguli latera simul sumpta majora sint semicirculo, & ex angulo ab iisdem contento ducatur arcus angulum illum bifariam dividens; contra, segmentum majus tertii lateris adiacebit lateri trianguli minori, minus majori.

Coroll. 2. Quod si iisdem positis, arcus eductus latus tertium bifariam dividerit; major pars anguli divisi majori trianguli lateri adiacebit, minor minori.

Hisdem positis, siue angulus, siue latus eidem subtensum bifariam facietur arcu ab angulo prodeunte; etiam trianguli latera angulum illum continentia simul sumpta majora duplo arcus bisecantis.

In triangulo ABT sit primo arcus AT bifariam sectus arcu BA ex angulo B educto: dico duos arcus AB , BT simul sumptos majores esse duplo arcu BA .

Producantur arcus BA , BT ad occursum in puncto E , & per jam demonstrata (in 20^m hujus) erit arcus BE minor quadrante; adeoque AE major erit quam BA . Fiat AE æqualis ipsi BA , & ducatur GI arcus circuli magni. Itaque quoniam arcus EA æqualis est ipsi BA , & AB ipsi AI , & duo anguli AAB , EAI æquales; erit arcus GI æqualis arcui AB . Adjiciatur utrinque arcus

arcus BF , & erunt BF , FI simul sumpti æquales arcibus AB , BF simul sumptis. Sed IF , IB simul (per 9^m hujus) majores sunt arcibus BA , AI simul; quare AB , BF majores sunt ipsis BA , AI . Arcus autem BA , AI simul sumpti dupli sunt arcus BA ; quare arcus AB , BF simul majores sunt duplo ipsius BA . Q.E.D.

Quod si arcus BA dividat angulum B bifariam: dico quod quod AB , BF simul sunt majores duplo arcus BA . Quoniam enim BA dividit angulum B bifariam; erit, per jam demonstrata, arcus IA major quam AI . Fiat ΔZ ipsi ΔA æqualis, & ducatur BZ arcus circuli magni, & per puncta I , Z arcus IZH . Quoniam autem ZA æqualis est ipsi ΔA , & posuimus ΔI ipsi BA æqualem, angulique $A\Delta B$, IAZ sunt æquales: erit arcus AB æqualis arcui IZ , & angulus BAA æqualis angulo ΔZI . Angulus autem BAA (per 9^m hujus) major est angulo BFA ; quare angulus ΔZI major est angulo BFA . Sed angulus ΔZI æqualis est angulo IZH , quare angulus IZH major est angulo BFA ; & angulus IZB major est angulo IZH , adeoque multo major angulo BFA : proinde (per 7^m hujus) arcus IB major est arcu ZB . Verum arcus IZ , ZB simul (per 5^m hujus) majores sunt quam BA , AI ; adeoque IZ , IB multo majores sunt arcibus BA , AI . Est autem IZ ipsi AB æqualis; quare AB , BF simul majores sunt ipsis BA , AI simul. Sed BA , AI sunt dupli ipsius BA ; quare AB , BF simul majores sunt duplo ipsius BA . Q.E.D.

Coroll. E contra vero, si latera trianguli simul sumpta majora sint semicirculo; erit arcus, bifariam dividens vel angulum contentum, vel latus tertium, major dimidio laterum contentium simul sumptorum.

Tricesima hæc Propositio in duas dividitur in Codd. Arabicis, quod quæ faci

Prop. XXXIII & XXXIV.

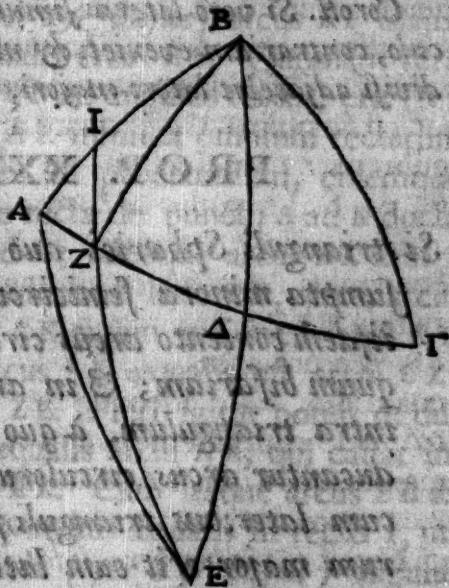
PROP.

PROP. XXXI. THEOR.

Si trianguli Sphærici duo latera fuerint inæqualia, simulque sumpta minora semicirculo; & ab angulo sub iisdem contento educatur ad latus reliquum arcus circuli magni, qui æqualis sit semissi laterum continentium: dividet ille arcus tum angulum tum latus reliquum in segmenta inæqualia; & utriusque portio major adiacebit lateri trianguli minori, minor vero majori.

Trianguli Sphærici $AB\Gamma$ sint latera AB , $B\Gamma$ minora semicirculo, sitque $B\Gamma$ major quam BA ; arcus autem $B\Delta$, eductus de B ad occursum arcus reliqui $A\Gamma$, sit æqualis dimidio ipsorum AB , $B\Gamma$ simul sumptorum: dico quod arcus $A\Delta$ major est ipso $\Delta\Gamma$, & angulus $AB\Delta$ major angulo $\Delta B\Gamma$.

Producatur arcus $B\Delta$ ad E , ita ut ΔB sit æqualis ipsi $B\Delta$, & ducatur $A E$ arcus circuli magni. Jam arcus $E A$, $A B$ (per 5^m huj.) majores sunt ipsis $E \Delta$, ΔB ; arcus autem $E \Delta$, ΔB sunt æquales lateribus AB , $B\Gamma$, quia $B\Delta$ est ipsorum dimidium: quare $A E$, $A B$ excedunt duos AB , $B\Gamma$; & sublato utrinque AB , remanebit $A E$ major quam $B\Gamma$. Sed $B\Gamma$ major est quam BA ; quare $A E$ major est dimidio ipsorum AB , $B\Gamma$, nempe ipso $B\Delta$; & arcus $B\Delta$, ΔE sunt æquales, quare $B\Gamma$ major est quam ΔE . Possibile igitur est ut ducatur ab E arcus circuli magni ipsi $B\Gamma$ æqualis, qui cadat inter duo arcus $A E$, $B \Delta$. Sit ille arcus $E Z$, qui producat ad occursum arcus AB in puncto I ; & ducatur arcus $B Z$. Jam arcus $B Z$, $Z E$ simul majores sunt quam $B \Delta E$, & $B \Delta E$ æqualis est ipsis AB , $B\Gamma$ simul sumptis; quare $B Z$, $Z E$ excedunt arcus AB , $B\Gamma$. Sed $Z E$ æqualis est ipsi $B\Gamma$; quare reliquus $B Z$ major est quam AB , ac proinde angulus BAZ major



jor est angulo BZA , ac multo major angulo IZA . Angulus autem IZA æqualis est angulo IZE ; quare angulus BAG major est angulo IZE . Addatur utrinque angulus BGA ; & erunt duo anguli BAG , BGA majores duobus IZE , BGA . Duo autem anguli BAG , BGA (per 10^m hujus) sunt minores duobus rectis; quare anguli BGA , IZA sunt minores rectis. Duo igitur triangula BAG , EAZ duos habent angulos ad verticem æquales; atque arcus duos alios angulos continentes æquales, nempe arcum BA arcui EA , & arcum BG arcui ZE ; reliqui vero anguli sunt minores rectis; quare (per 13^m hujus) arcus reliquus æqualis erit arcui reliquo, ac duo anguli reliqui duobus reliquis respective æquales: adeoque angulus GBA angulo $ZEΔ$, atque arcus GA æqualis est arcui AZ . Sed arcus AA major est quam AZ , adeoque major quam GA . Arcus autem EZ , hoc est arcus BF , major est arcu BA ; arcus igitur EF major est arcu BA , & multo major arcu IB . quocirca angulus IEB , hoc est $ABΔ$, major est angulo IEB , hoc est $ZEΔ$. Sed angulus $ZEΔ$ æqualis est angulo GBA , uti jam demonstratum est; angulus igitur $ABΔ$ major est angulo GBA . **Q. E. D.**

Coroll. Si vero latera simul sumpta majora fuerint semicirculo, contrarium eveniet; & major pars tum anguli tum lateris divisi adjacebit lateri majori, minor vero minori.

PROP. XXXII. THEOR.

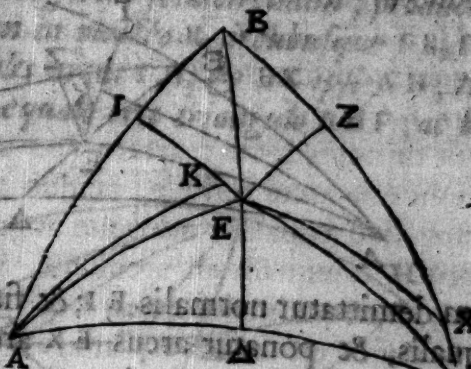
Si trianguli Sphærici duo latera sint inæqualia & simul sumpta minora semicirculo; & educatur ab angulo sub iisdem contento arcus circuli magni, dividens latus reliquum bifariam; & in arcu illo educto capiatur punctum intra triangulum, à quo ad extremitates arcus bisecti ducantur arcus circulorum magnorum: ipsi continebunt cum lateribus trianguli primis angulos inæquales, quorum major erit cum latere minore, minor vero cum latere majore.

In triangulo Sphærico ABG sint latera AB , BG simul minora semicirculo, & BG major quam AB ; & ex angulo B producat arcus circuli magni BA , dividens arcum AG bifariam in Δ ; & sumatur in BA punctum aliquod E , à quo ducantur ad

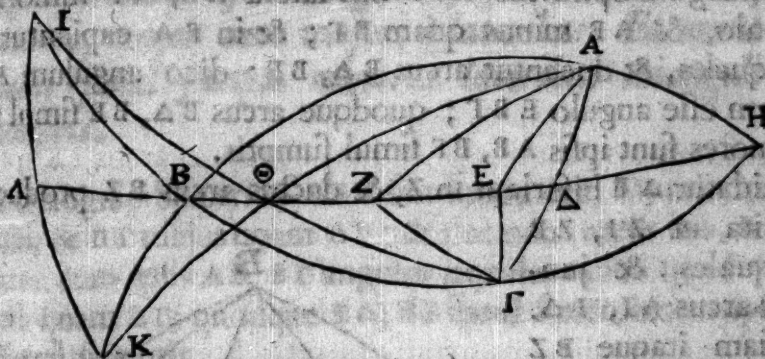
extre-

extremitates arcus $A\Gamma$ duo arcus circulatorum maiorum $A\Gamma$, $E\Gamma$. dico angulum $B\Delta E$, qui adjacet arcui $A\Gamma$, maiorem esse angulo $B\Gamma E$ arcui majori $B\Gamma$ adjacente.

Quoniam enim arcus $B\Delta$ dividit $A\Gamma$ bifariam, erit (per 10^m hujus) angulus $A\Delta B$ major angulo $\Gamma\Delta B$; quare angulus $\Gamma\Delta B$ est minor recto: atque angulus $A\Gamma B$ minor est angulo $B\Delta\Gamma$, ac proinde minor recto. Angulo igitur $B\Gamma\Delta$ existente semper acuto, cadet arcus à puncto B ad arcum $B\Gamma$ normaliter demissus, inter puncta B, Γ . Sit ille arcus BZ . Arcus autem de puncto E super arcum AB perpendicularis, vel occurret ipsi AB , vel non. Occurrat primo inter A, B ad modum arcus EI : anguli igitur BIE , BZE sunt recti, & angulus IBE major est angulo EBZ , & arcus BE communis est utrique triangulo; quare (per 19^m hujus) arcus $E\Gamma$ major est arcu EZ . Fiat arcus IK aequalis arcui EZ . Quoniam vero arcus circuli AI occurrat arcui EI ad angulos rectos, erit (per 1^{am} III. Theod.) juncta recta AI minima omnium rectarum linearum de puncto A ad arcum $E\Gamma$ prodeuntium, eidemque propior minor remotiore; quare recta de puncto A ad K ducta minor est recta de puncto A ad E ; adeoque arcus AK minor est arcu AE . Arcus autem AE minor est arcu ΓE , quare arcus ΓE major est arcu AK . Arcus AK autem major est arcu $E\Gamma$, quia angulus I rectus est; & arcus IK aequalis est arcui EZ : quare arcus AK major est arcu $Z\Gamma$. Fieri igitur potest ut ducatur ab E ad arcum $Z\Gamma$ arcus aequalis arcui AK , qui cadat inter puncta Z, Γ . Sit ille arcus EX . Cum itaque arcus ZB aequalis sit ipsi ΓE , & angulus BZX rectus aequalis sit recto I , uti & arcus EX ipsi AK aequalis; erit (per 13^m hujus) angulus EAK aequalis angulo ZXE , ac propterea angulus IAE major erit angulo ZXE . Sunt autem arcus AB , $B\Gamma$ simul sumpti minores semicirculo; quare (per 6^m hujus) arcus AE , $E\Gamma$ simul sunt minores semicirculo: & arcus AK minor est quam AB ; quapropter arcus ΓE , AK simul, hoc est arcus ΓE , EX simul, multo minores sunt semicirculo. Angulus igitur ZXE (per 10^m hujus)



angulum $\odot AB$ majori lateri adjacentem majorem esse angulo $\odot IB$. Ductis enim arcibus $\odot \Gamma$, $\odot A$ qui simul sint minores semicirculo; manifestum est ex praemissis angulum $Z A \odot$ minorem esse angulo $Z \Gamma \odot$: his autem ex aequalibus $Z AB$, $Z \Gamma B$ sublati, residuus angulus $\odot AB$ major erit residuo $\odot \Gamma B$. Si vero arcus $\odot A$, $\odot \Gamma$ simul excefferint semicirculum; productis arcibus AB , $A \odot$ ad occursum in puncto K , arcibusque ΓB , $\Gamma \odot$ ad punctum I : erit BI aequalis arcui ΓH , & BK ipsi AH ; triangulumque IBK per omnia aequale erit triangulo AHG ; ac ba-



sis ejus bisecabitur in puncto Λ ab arcu $B \Delta$ producto. Arcus autem ΓI , $A K$ sunt semicirculi; & $A \odot$, $\odot \Gamma$ simul excedunt semicirculum; quare reliqui arcus $I \odot$, $\odot K$ simul minores sunt semicirculo; ac proinde angulus $BI \odot$ adjacens majori lateri IB , juxta jam demonstrata, minor erit angulo $BK \odot$: angulus igitur $\odot AB$, qui quidem aequalis est angulo $BK \odot$, major erit angulo $\odot \Gamma B$ ipsi $\odot IB$ aequale & minori lateri $B \Gamma$ adjacente. Quod si arcus $A \odot$, $\odot \Gamma$ simul conficiant semicirculum, demittantur ad arcus AB , $B \Gamma$ normales de puncto $\odot$. Cumque angulus $AB \odot$ (per 30^m hujus) major sit angulo $\Gamma B \odot$; major erit arcus normaliter ad AB demissus quam qui ad $B \Gamma$ demittitur. Sunt autem arcus $\Gamma \odot$, $\odot K$, qui angulis rectis subtenduntur, aequales; quare angulus K , hoc est angulus $BA \odot$, major erit angulo $B \Gamma \odot$.

Quocirca si sumatur punctum $\odot$ inter verticem B & punctum Z , erit angulus qui adjacet majori trianguli lateri major eo qui adjacet minori. E. contra vero, si capiatur punctum, at E , inter Z & Δ , major angulus adiacebit lateri minori, minor majori.

PROP. XXXIII. THEOR.

Si triangulum Sphaericum duo habeat latera inaequalia &

simul minora semicirculo, & ab utraq; extremitate lateris reliqui abscindantur duo arcus aequales, & à punctis sectionum ducantur arcus ad angulum à lateribus semicirculo minoribus contentum: tunc ipsi continebunt cum lateribus illis angulos inaequales, quorum major erit apud latus minus, & minor apud latus majus: & erunt arcus ducti simul sumpti minores lateribus trianguli simul.

In triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sint latera AB , $B\Gamma$ minora semicirculo, & AB minus quam $B\Gamma$; & in ΓA capiantur ΓE , $A\Delta$ æquales, & ducantur arcus $B\Delta$, BE : dico angulum $AB\Delta$ majorem esse angulo $EB\Gamma$; quodque arcus $B\Delta$, BE simul sumpti minores sunt ipsis AB , $B\Gamma$ simul sumptis.

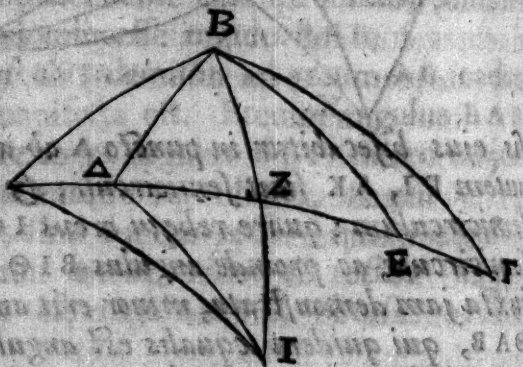
Dividatur ΔE bifariam in Z , & ductus arcus BZ producat ad I , ita ut ZI , ZB sint æquales: & jungantur arcus AI , $I\Delta$. Quoniam itaque BZ dividit ΔE bifariam, (per 29^m hujus) minor erit quadrante: cumque $Z\Gamma$, ZA sunt æquales, & BZ , ZI æquales, uti angulus $BZ\Gamma$ angulo AZI ; erit arcus $B\Gamma$ arcui AI æqualis: ac pari ratione arcus BB ipsi $I\Delta$. Est autem ΓB ipsi $A\Delta$ æqualis; quare angulus ΓBE æqualis est angulo AID . AI vero ipsi $B\Gamma$ æqualis est, & $B\Gamma$ major est arcu AB , quare AI major est arcu AB : & BA , AI simul sunt minores semicirculo; AZ autem secat arcum BI bifariam, sumiturque in eo punctum Δ , & ducuntur arcus $B\Delta$, ΔI . Quocirca angulus $AB\Delta$ major est angulo AID ipsi $EB\Gamma$ æquali: unde angulus $AB\Delta$ major erit angulo $EB\Gamma$. Præterea arcus IA , AB simul (per 6^m hujus) majores sunt ipsis $B\Delta$, ΔI simul: & arcus IA , $B\Gamma$ sunt æquales inter se, uti ΔI , BE ; quare AB , $B\Gamma$ simul majores sunt ipsis ΔB , BE simul sumptis Q. E. D.

Coroll. Si vera latera simul sumpta majora fuerint semicirculo: dico angulum majorem adiacere majori lateri; arcusque ductos simul sumptos majores esse lateribus trianguli simul.

simul

et

PROP.

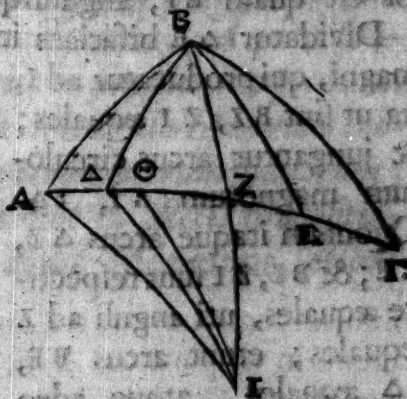


PROP. XXXIV. THEOR.

In omni triangulo Sphaerico latera habente inaequalia, simul vero minora semicirculo; si ab angulo lateribus illis contento ducantur ad latus reliquum duo arcus, qui contineant cum lateribus trianguli duos angulos aequales: abscindant hi arcus ab utraque extremitate lateris reliqui portiones ejus inaequales, quarum minor adiacebit minori, major vero majori è lateribus. Et erunt arcus ducti simul sumpti minores lateribus trianguli simul sumptis.

In triangulo Sphaerico $AB\Gamma$ sint latera AB , $B\Gamma$ minora semicirculo, & $B\Gamma$ majus quam AB ; & ducantur arcus BA , BE continentes cum ipsis AB , $B\Gamma$ angulos aequales: dico quod AE minor est quam $B\Gamma$; quodque BA , BE simul sunt minores ipsis AB , $B\Gamma$ simul sumptis.

Dividatur $A\Gamma$ bifariam in Z , & producat BZ ad I , ut sint BZ , ZI aequales; & ducantur arcus AI , IE . Et, ut in precedente ostendimus, erit primo $B\Gamma$ ipsi AI aequalis, & angulus ZAI angulo $Z\Gamma B$. Angulus autem $AB\Delta$ major est angulo $AE\Delta$; atque angulus $AB\Delta$ aequalis est angulo $EB\Gamma$: quare angulus $EB\Gamma$ major est angulo $AE\Delta$. Fiat igitur angulus $AE\Theta$ aequalis angulo $EB\Gamma$. Demonstravimus autem angulos $EB\Gamma$, ΔAI aequales esse, uti arcus $B\Gamma$, AI aequales, apud quos sunt anguli aequales: quare (per 14^m hujus) arcus $A\Theta$, ΓE erunt aequales, atque adeo arcus AE minor erit quam $B\Gamma$. Dico quoque quod arcus AB , $B\Gamma$ simul excedunt arcus AE , BE simul sumptos. Nam cum BA , AI simul (per 1^{am} hujus) majores sunt quam BA , ΔI ; & arcus AI , $B\Gamma$ sunt aequales; erunt arcus AB , $B\Gamma$ simul majores quam BA , ΔI . Angulus autem $AZ\Delta$ major est recto, ac arcus AI major arcu ZI ; quare (per 1^{am} III, Theor.) arcus ΔI major est arcu



IE , at-

$I\Theta$, atque $I\Theta$ æqualis est ipsi BB : quare ΔI major est quam BE , ac proinde AB , BT multo excedunt ipsas $B\Delta$, BE . Q. E. D.

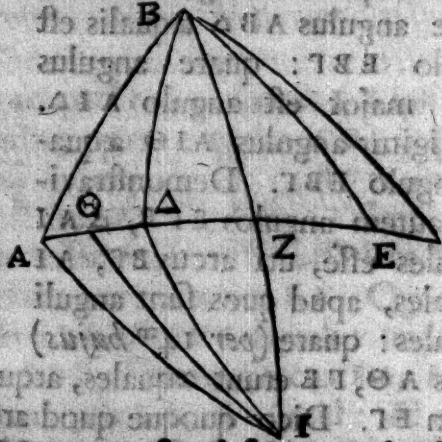
Coroll. Quod si latera trianguli simul sumpta majora fuerint semicirculo; e contra arcus qui adiacet majori lateri major erit; arcusque duæ simul sumpti majores erunt lateribus trianguli.

PROP. XXXV.

In omni triangulo Sphærico, cujus sunt duo latera inæqualia & minora semicirculo, si ducantur, ab angulo lateribus istis contento ad latus reliquum, duo arcus qui simul sumpti æquales sint duobus trianguli lateribus simul; constituent hi arcus cum lateribus trianguli angulos inæquales: abscindent etiam e reliquo trianguli latere arcus inæquales; eritque tum angulus major, tum arcus abscissus major, apud latus trianguli minus.

In triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sit arcus $B\Gamma$ major quam BA , qui simul sint minores semicirculo, & ducantur arcus $B\Delta$, BE ipsis BA , $B\Gamma$ simul sumptis æquales: dico quod arcus $A\Delta$ major est quam $E\Gamma$, angulusque $AB\Delta$ major angulo $E\Gamma$.

Dividatur ΔB bifariam in Z , & ducatur BZ arcus circuli magni, qui producat ad I , ita ut sint BZ , ZI æquales; & jungantur arcus circulorum magnorum AI , IA . Quoniam itaque arcus ΔZ , ZE ; & BZ , ZI sunt respective æquales, uti anguli ad Z æquales; erunt arcus BE , IA æquales, atque adeo arcus $B\Delta$, AI simul æquales arcibus $B\Delta$, BE , hoc est ipsis AB , $B\Gamma$ simul; proinde arcus IA , AB simul sunt æquales ipsis AB , $B\Gamma$. Sunt autem IA , AB (per 6^m buj.) majores ipsis IA , AB ; quare IA , AB majores sunt quam AB , $B\Gamma$: & sublato communi AB , erit arcus AI major ipso $B\Gamma$. Et quoniam BZ dividit arcum ΔE bifariam, constabit (per 30^m buj.) arcus $E\Gamma$, $B\Delta$ simul

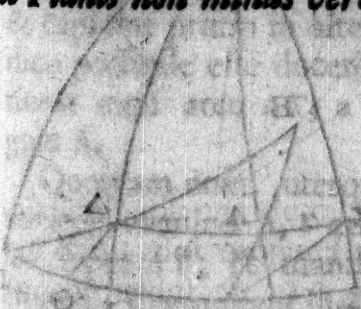


$B\Delta$ simul majores esse duplo arcus BZ . Atqui $B\Delta$, BE simul æquales sunt ipsis AB , BF ; quare AB , BF majores sunt duplo ipsius BZ : & BF major est quam AB , ac proinde quam BZ . Sunt autem BZ , ZI æquales; quare ZI minor est quam BF . Verum AI major est quam BF , quare possibile est ut ducatur à puncto I ad arcum AZ arcus qui cadat inter puncta A , Z , ipseque BF æqualis. Sit ille arcus $I\Theta$; & erit (per 4^m buj.) ΘZ æqualis ipsi ZI . Arcus autem $Z\Delta$ ipsi ZB æqualis est. Restabit igitur $\Delta\Theta$ ipsi BF æqualis; unde manifestum erit arcum $A\Delta$ majorem esse arcu BF . Et (per 32^m buj.) constabit angulum $AB\Delta$ majorem esse angulo $AI\Delta$, multoque majorem angulo $\Theta I\Delta$. Sed angulus $\Theta I\Delta$ æqualis est angulo EBF . (quoniam anguli ZBT , $ZI\Theta$; ZBE , $ZI\Delta$ sunt respective æquales, adeoque & reliquis EBF reliquo $\Theta I\Delta$ æqualis) quare angulus $AB\Delta$ major est angulo EBF . Q. E. D.

Coroll. Quod si latera trianguli majora fuerint semicirculo, tum angulus major, tum arcus abscissus major, erit apud latus majus. Quæ omnia manifesta erunt, si producantur arcus AB , $B\Delta$, BE , BF ad occursum.

SCHOLION.

Propositio XXX. eamque subsequentes quinque, locum habent etiam in triangulis planis rectilineis; id quod proclive esset demonstrationibus propriis in singulis comprobare. In præsentiarum sufficiat indicasse triangula Sphærica minima formam rationemque habere triangularum planorum; unde manifestum est eadem omnia quæ in dictis propositionibus de Sphæricis demonstrata dedit Menelaus, etiam de Planis non minus vera esse.



MENE

MENELAI

ALEXANDRINI

SPHÆRICORUM

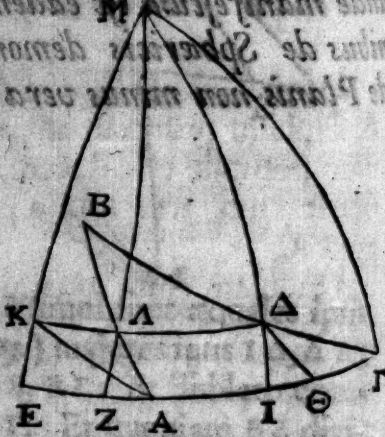
LIB. II.

PROP. I. PROBL.

A sumpto puncto in latere trianguli Sphærici obtusanguli, angulo obtuso opposito; ducere arcum circuli magni, qui cum altero ex arcibus, obtusum angulum continentibus, comprehendat angulum eidem obtuso angulo æqualem.

Sic triangulum $AB\Gamma$ quale descripsimus; ita ut AB , $B\Gamma$ sint minores semicirculo; & capiantur in arcu $B\Gamma$ punctum Δ ; oporteat ducere ad arcum $A\Gamma$ à puncto Δ arcum circuli magni, continentem cum ipso $A\Gamma$ angulum æqualem obtuso $B\Gamma$.

Sit M polus arcus $A\Gamma$, & per puncta M , Δ ducatur arcus circuli magni $M\Delta I$; & producat arcus $A\Gamma$ ad E , ita ut AE , ΓI sint æquales; & ducatur ME arcus circuli magni. Quoniam autem ΓB , BA simul minores sunt semicirculo, erit (per 13^{am} hujus) angulus



angulus $\angle A B$ major angulo Γ . Fiat angulus $\angle A K$ (per 1^m I. *hujus*) æqualis angulo Γ ; cumque anguli apud æquales arcus duorum triangulorum $\Gamma \Delta I$, $\angle A K E$ sint respective æquales; erit arcus $B K$ æqualis arcui $I \Delta$: & arcus $E M$ æqualis est arcui $M I$; quare arcus $M K$ æqualis est arcui $M \Delta$. Polo igitur M , intervallo $M \Delta$, describatur arcus circuli $K \Lambda \Delta$, qui arcui $A B$ occurrat in puncto Λ ; & ducatur arcus circuli magni $M \Lambda Z$. Quoniam autem angulus A est obtusus, erit $B \Gamma$ major quam $A B$; adeoque ΓI major quam ΛZ . Ponatur itaque in arcu ΓI arcus $I \Theta$ ipsi ΛZ æqualis, & per Δ , Θ transeat arcus circuli magni $\Delta \Theta$: dico angulum $\Delta \Theta \Gamma$ æqualem esse angulo $B A \Gamma$.

Quoniam enim arcus $M \Lambda Z$ æqualis est arcui $M \Delta I$, & $M \Lambda$ ipsi $M \Delta$ æqualis; erit arcus ΛZ arcui $I \Delta$ æqualis. Fecimus autem arcus ΛZ , $I \Theta$ æquales, & anguli $\Delta I \Theta$, $\angle Z \Lambda \Gamma$ sunt etiam æquales, quippe recti: erit igitur angulus $\Delta \Theta I$ (per 4^m I. *hujus*) æqualis angulo $B A Z$: quapropter angulus deinceps $\Delta \Theta \Gamma$ æqualis erit angulo $B A \Gamma$. Q. E. D.

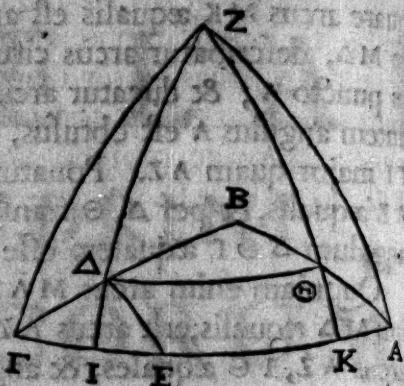
PROP. II. PROBL.

In omni triangulo Sphærico, duos angulos acutos habente, si capiatur punctum vel intra triangulum, vel in aliquo è lateribus angulos illos acutos subtendentibus: possumus ducere è puncto sumpto ad latus trianguli, apud quod sunt duo anguli illi acuti, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo contento sub eodem & reliquo latere trianguli.

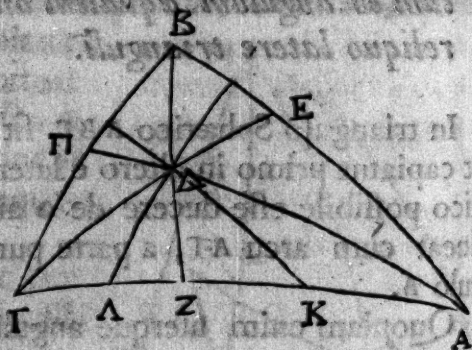
In triangulo Sphærico $A B \Gamma$ sit uterque angulus A , Γ acutus, & capiatur primo in altero è lateribus $B \Gamma$ punctum aliquod Δ : dico possibile esse ducere de Δ arcum circuli magni, qui contineat cum arcu $A \Gamma$, a parte puncti Γ , angulum æqualem angulo A .

Quoniam enim uterque angulus A , Γ minor est recto; ex utroque termino A , Γ erigantur arcus ΓZ , $Z A$ ad rectos angulos super $A \Gamma$; & manifestum est eos concursuros ultra punctum B . Conveniant in Z , quod polus erit arcus $A \Gamma$, & ducatur $Z \Delta I$ arcus circuli magni: dein polo Z , intervallo $Z \Delta$, describatur arcus $\Delta \Theta$, & per Θ ducatur arcus circuli magni $Z \Theta \Gamma$. Jam

si fuerit $B\Gamma$ major quam AB , manifestum est angulum $B\Lambda\Gamma$ majorem esse angulo $\Delta\Gamma I$. Est autem angulus $\Theta K A$ rectus & æqualis recto $\Delta I\Gamma$, uti arcus ΔI arcui ΘK ; unde manifestum est majorem esse arcum $I\Gamma$ quam $K A$. Et si adjiciatur arcui $I\Gamma$ arcus $E I$ ipsi $K A$ æqualis, & fiat, ut factum est in figura primâ, habebimus propositum. Quod si fuerit $B\Gamma$ minor arcuum, erit ΓI minor quam ΛK ; &, cæteris pari modo peractis, si fiat $E I$ ipsi ΛK æqualis, & ducatur arcus ΔE ; erit angulus $\Delta E I$ æqualis angulo $B\Lambda K$. Q. E. F.



Si vero punctum non fuerit in latere trianguli $AB\Gamma$, sed intra illud, puta ad Δ : ducatur per Γ , Δ arcus circuli magni $\Gamma\Delta B$; cumque uterque angulus $B\Lambda\Gamma$, $E\Gamma A$ est recto minor, possibile erit ducere ad arcum $A\Gamma$, de puncto Δ in arcu $E\Gamma$, arcum circuli magni, qui contineat cum eo angulum æqualem angulo $B\Lambda\Gamma$, quemadmodum ostensum est in hujus propositionis præmissis. Sit autem ille arcus ΔK : quare angulus $\Delta K\Gamma$ æqualis erit angulo $B\Lambda\Gamma$. Ac si velimus ducere, de puncto Δ ad arcum $A\Gamma$, arcum qui contineat cum eo angulum æqualem angulo $B\Gamma A$, ducatur arcus $\Delta\Lambda$; &, per jam dicta, possumus ducere per Δ , ad $A\Gamma$ in triangulo $\Lambda\Gamma\Gamma$, arcum facientem cum $A\Gamma$ angulum æqualem angulo Γ . Sit ille arcus $\Delta\Lambda$; quare angulus $\Delta\Lambda A$ æqualis erit angulo $B\Gamma A$.

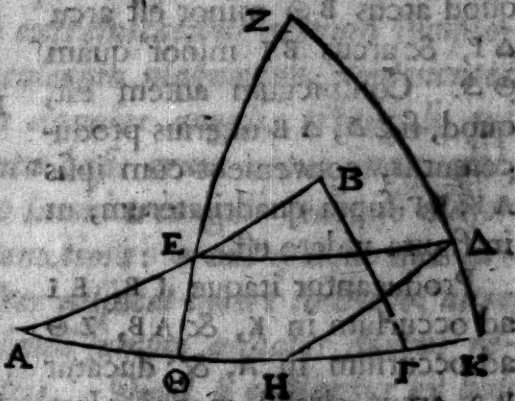


Dico quoque, quod, si arcus AB trianguli Sphærici $AB\Gamma$ minor fuerit quadrante circuli, arcus per punctum Δ ductus ad arcum $A\Gamma$, & cum eo continens angulum æqualem angulo $B\Lambda\Gamma$, si producat, occurret arcui $B\Gamma$ inter B & Γ . Ducatur enim per Δ arcus circuli magni $B\Delta Z$; cumque anguli A , Γ simul minores sint duobus rectis; erunt arcus AB , $B\Gamma$ simul (per 10^m I. *huj.*) minores semicirculo. Quoniam vero arcus BZ cadit medio

medio inter eos, erit saltem alter ex arcibus AB , $B\Gamma$ major arcu BZ : ac si fuerit $B\Gamma$ major arcu BZ , manifestum est AB , BZ simul minores esse semicirculo. Etiam si vero $B\Gamma$ non fuerit major quam BZ , supponitur tamen AB minor quadrante, qui quidem major est quam BZ : quare AB , BZ simul sumpti minores sunt semicirculo, atque adeo angulus exterior $BZ\Gamma$ major est angulo A . Arcus igitur de puncto A eductus ad arcum $A\Gamma$, ac cum eodem angulum continens æqualem angulo A , cadet inter puncta Z , A : ac proinde arcus KA productus occurreret arcui $B\Gamma$. Q. E. D.

SCHOLION.

Non video quid opus sit tantis ambagibus in re facili & manifesta. Etenim in omni casa, & quocunque modo sumatur punctum Δ , vel in arcu $B\Gamma$, vel intra vel extra triangulum, in spatio omni interjacente circumlo majorem $\Lambda\Gamma$ & minorem ipsi $\Lambda\Gamma$ parallelum, quem contingit circulus ΛB , possumus arcum per Δ ducere qui cum arcu $\Lambda\Gamma$ contineat angulum æqualem angulo Λ . Sit enim Z potius arcus $\Lambda\Gamma$: & polo Z , intervallo $Z\Delta$, describatur arcus circuli minoris, qui, cum inter dictos parallelos sit, necessario occurret arcui ΛB , si opus sit producto. Occurrat in puncto E . Dein fiat arcus ΔH ipsi ΛE æqualis, & describatur arcus circuli magni ΔH : dico angulum $\Delta H\Gamma$ æqualem esse angulo $B\Lambda\Gamma$. Demissis enim ad arcum $\Lambda\Gamma$ normalibus $E\Theta$, ΔK ; ex 12^{ma} I. hujus, constabit trianguula $\Lambda E\Theta$, $H\Delta K$ per omnia æqualia esse.



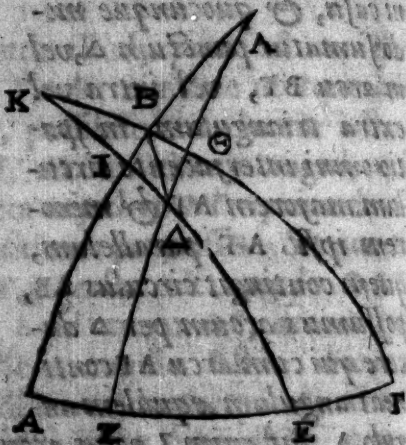
PROP. III. THEOR.

Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major fuerit recto, ac fuerit utrumque latus angulum illum continens circuli quadrante minus; ac si capiatur punctum

intra triangulum, per quod ducatur ad latus reliquum angulo illi subtensum duo arcus circularum magnorum, qui cum eodem angulo angulis trianguli reliquis contineant respective æquales: erit utrumque latus figura quadrilateræ apud verticem trianguli, è lateribus ejus deductis arcubus abscissum, minus latere eidem opposito.

In triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sit angulus B non major recto; utrumque vero latus AB , $B\Gamma$ sit quadrante minus, & è sumpto puncto Δ educatur (per præced.) arcus circuli magni $\Theta\Delta Z$, qui faciat angulum $\Delta Z\Gamma$ æqualem angulo A ; transeat etiam per Δ arcus $B\Delta I$, constituens angulum ΔBZ æqualem angulo Γ : dico quod duo latera quadrilateri ΘB , $I\Gamma$, quæ abscissa sunt è lateribus trianguli, minora sunt lateribus iisdem oppositis; nempe quod arcus $B\Theta$ minor est arcu ΔI , & arcus $B I$ minor quam $\Theta\Delta$. Conspicuum autem est, quod, si $Z\Delta$, ΔB ulterius producerentur, convenient cum ipsis AB , $B\Gamma$ supra quadrilaterum, ut in figura videre est.

Producantur itaque ΓB , $E I$ ad occursum in K , & AB , $Z\Theta$ ad occursum in Λ , & ducatur $B\Delta$ arcus circuli magni. Jam quoniam angulus $\Delta Z\Gamma$ æqualis est angulo A , erunt arcus $\Lambda\Delta$, ΛZ simul sumpti (per 10^m l. buj.) æquales semicirculo; adeoque $B\Lambda$, $\Lambda\Delta$ simul sunt minores semicirculo: unde (per 10^m l. buj.) angulus $I\Gamma\Delta$ major erit angulo $B\Delta\Lambda$. Ac pari argumento, cum $B K$, $K\Delta$ sint minores semicirculo, erit angulus $\Theta B\Delta$ major angulo $B\Delta K$; adeoque totus angulus $\Theta B I$, quem supponimus recto non majorem, major erit angulo $\Theta\Delta I$: ac proinde anguli $\Theta B I$, $\Theta\Delta I$ simul sumpti erunt minores duobus rectis. Quoniam vero in omni triangulo Sphærico tres anguli (per 11^m l. buj.) sunt majores duobus rectis, patet quatuor angulos quadrilateri majores esse quatuor rectis: cum autem demonstratum sit duos angulos ad B & Δ minores esse duobus rectis; erunt duo reliqui anguli $B\Theta\Delta$, $B I\Delta$ majores duobus rectis. Habent igitur duo triangula $\Theta B\Delta$, $B\Delta I$ arcum $B\Delta$ communem utrique; &, per jam dicta, angulus



$\angle B \Delta$ unius major est angulo alterius $\angle B \Delta \Theta$; prioris autem trianguli angulus reliquus apud latus commune, nempe angulus $\angle B \Delta I$, minor est reliquo alterius angulo $\angle \Theta B \Delta$; tertiū autem anguli in utroque, nempe anguli $\angle \Theta$ & $\angle I$, majores sunt recto: latera igitur, quæ angulis majoribus subtenduntur, erunt (per 19^m L. hujus) majora, quæque angulis minoribus minora: ac proinde arcus ΔI major erit quam $B \Theta$, & $\Theta \Delta$ major arcu BI . Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

In triangulo Sphærico, si fuerint duo crura equalia, $\angle$ angulus ab iisdem contentus non major recto; & uterque reliquorum angulorum acutus; & si capiantur in uno crurum duo arcus æquales, sive continui sive disjuncti; ac ducantur ab extremitatibus arcuum sumptorum ad basim arcus circulorum magnorum, continentes cum eadem basi angulos æquales angulis trianguli qui ad basim: tum segmenta basis erunt arcus inæquales, quorum ille qui adjacet lateri trianguli indiviso major erit altero ab eodem remotiore: erunt quoque duo arcus extremi (quorum alter adjacet lateri indiviso, alter angulo eidem opposito) simul sumpti æquales duobus reliquis arcubus intermediis. Quod si capiantur ex basi arcus æquales, sive continui sive disjuncti, ac ab eorum extremitatibus ducantur arcus ad alterum cruram, qui contineat cum basi angulos æquales angulo ad basim trianguli: abscindant hi arcus e crure illa segmenta inæqualia, quorum quod propius est cruri indiviso minus erit remotiore: & erit crus indivisum, una cum illo arcu qui adjacet angulo eidem cruri opposito simul sumptis, minus duobus reliquis arcubus intermediis simul sumptis.

In triangulo Sphærico æquicruri $AB \Gamma$ sint crura æqualia AB , $B \Gamma$; angulus vero non major recto sit B ; uterque vero reliquorum angulorum A , Γ sit minor recto; & abscindantur ex arcu $B \Gamma$ duo arcus æquales $B \Delta$, $E Z$; & per puncta Δ , E , Z ducantur ad basim $A \Gamma$ arcus circulorum magnorum ΔI , $E \Theta$, $Z H$, continentes

continentes cum ea angulos æquales angulo A : dico quod AI major est quam ΘK ; quodque arcus AB , ZK simul sumpti sunt æquales ipsis ΔI , $E \Theta$ simul sumptis.

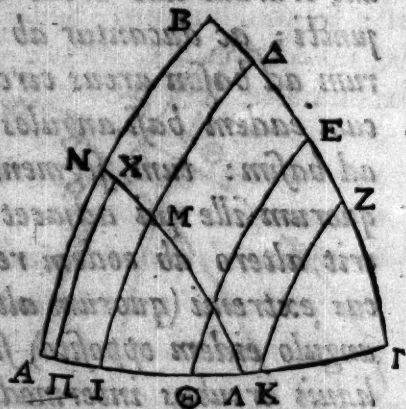
Fiat IA æqualis ipsi $K\Gamma$: cumque uterque angulus A , Γ est minor recto, erit utrumque crurum AB , $B\Gamma$ minus quadrante, adeoque arcus è puncto A ductus, qui contineat cum AA angulum æqualem angulo Γ , occurreret arcui AB . Sit ille angulus $A\Lambda M$ æqualis angulo Γ ; & erit IM ipsi KZ æqualis, & MA ipsi ΓZ ; quia arcus IA æqualis est ipsi ΓK , & anguli qui sunt apud arcus æquales sunt etiam æquales. Angulus autem B non est major recto, ac utrumque latus AB , $B\Gamma$ est minus quadrante, & angulus $M\Lambda I$ est æqualis angulo Γ , uti angulus MIA angulo A ; erit igitur (*per præcedentem*) arcus MN major quam $B\Delta$. $B\Delta$ autem est æqualis ipsi EZ : quare MN major est quam EZ . Sit

MX ipsi EZ æqualis, & ducatur arcus $X\Pi$, continens cum $A\Gamma$ angulum $X\Pi\Gamma$ æqualem angulo A . Quoniam vero FZ æqualis est ipsi ΛM , & ZB æqualis ipsi MX ; erit totus arcus ΓE æqualis toti $X\Lambda$. Atqui $X\Lambda$ est æqualis ipsi $X\Pi$, quare $X\Pi$ æqualis est ipsi ΓE , & ΓB ipsi $E\Theta$; quare arcus $X\Pi$ æqualis est ipsi $E\Theta$, atque adeo $\Gamma\Theta$ æqualis ipsi $\Lambda\Pi$. Fecimus autem ΓK æqualem ipsi ΛI ; quare $I\Pi$ æqualis erit ipsi ΘK . Sed punctum Π cadit inter A , I ; adeoque AI major est quam ΘK . Q. E. D.

Dico jam quod AB , ZK simul æquales sunt ipsis ΔI , $E\Theta$ simul sumptis. Quoniam enim $B\Delta$ æqualis est ipsi EZ , & ΔB communis est, erit BE æqualis ipsi ΔZ . Adjiciatur utrinque $Z\Gamma$; & arcus BE , $Z\Gamma$ simul æquales erunt arcui $\Delta\Gamma$. His addatur communis arcus $E\Gamma$, & erunt $B\Gamma$, ΓZ simul æquales ipsis $\Delta\Gamma$, ΓE simul. Verum $B\Gamma$ æqualis est ipsi BA , & $\Delta\Gamma$ ipsi ΔI , & ΓE ipsi $E\Theta$, uti & ΓZ ipsi ZK ; quare arcus AB , ZK simul sumpti sunt æquales arcubus ΔI , $E\Theta$ simul sumptis. Q. E. D.

Porro si fuerit AI ipsi ΘK æqualis, ac ducantur arcus IA , ΘE , KZ , sub eodem angulo quo AB super arcum $A\Gamma$: dico quod $B\Delta$ minor est quam EZ ; quodque arcus AB , ZK simul minores sunt arcubus IA , ΘE simul sumptis.

Fiat



Fiat $\angle A$ ipsi $\angle K$ æqualis, & ducatur arcus $\Lambda M N$ continens cum $\angle A$ angulum $\Lambda \Delta M$ æqualem angulo Γ . Itaque quoniam $\angle A$ æqualis est ipsi $\angle K$, & anguli qui sunt super arcus æquales, sunt in utroque triangulo $Z \Gamma K$, $M \Delta I$ respective æquales; erit (per 14^m I. *hujus*) $\angle Z$ ipsi $\angle M$ æqualis. Cum autem $\angle K$, $\angle I$, & $\angle \Theta$, $\angle A$ sunt æquales, erit $\angle \Theta$ ipsi $\angle A$ æqualis, adeoque & $\angle N$ ipsi $\angle E$. At vero $\angle Z$ æqualis est ipsi $\angle M$; quare $M N$ æqualis est ipsi $Z E$. Sed (per 3^m II. *huj.*) $M N$ major est quam $B \Delta$; quare $E Z$ major est quam $B \Delta$.

Dico quoque quod $A B$, $Z K$ simul sunt minores ipsis ΔI , $E \Theta$. Nam cum $B \Delta$ minor est quam $E Z$, adjecto utrinque ΔE , erit totus $B E$ minor arcu ΔZ . Addatur utrinque communis $Z \Gamma$, & erunt arcus $B E$, $Z \Gamma$ simul minores arcu $\Delta \Gamma$. His adjiciatur utrinque arcus ΓE , & erunt arcus $B \Gamma$, ΓZ simul minores ipsis $\Delta \Gamma$, ΓE simul sumptis. Sed $B \Gamma$ æqualis est ipsi $B A$, & ΓZ ipsi $Z K$; uti $\Delta \Gamma$ ipsi ΔI , atque $E \Gamma$ arcui ΘB : quapropter $A B$, $Z K$ simul minores sunt ipsis ΔI , $E \Theta$ simul sumptis. Q. E. D.

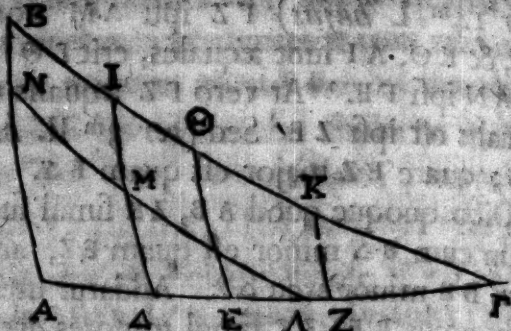
P R O P. V. T H E O R.

Si in triangulo Sphærico aliquis ex angulis non major fuerit recto; & arcus ipsum continentes fuerint inæquales, nec major eorum exceßerit quadrantem; & si capiantur in basi utcumque duo arcus æquales, à quorum terminis ducantur arcus circulatorum magnorum ad arcum majorem, continentes cum basi angulos æquales contento sub basi & arcu reliquo: abscindent hi arcus ex arcu majori segmenta inæqualia, quorum majus erit illud quod propius distat à basi. Et erit arcus indivisus, una cum eo qui adjacet angulo trianguli eidem opposito simul sumpto, minor duobus reliquis arcubus intermediis.

In triangulo Sphærico $A B \Gamma$, sit angulus B non major recto, & sit $B \Gamma$ major quam $A B$, sed non major quartâ circuli; & in $A \Gamma$ capiantur duo arcus æquales $\Lambda \Delta$, $E Z$, & ducantur arcus ΔI , $E \Theta$, $Z K$, continentes cum $\angle A$ angulos æquales angulo A . dico quod arcus $I B$ minor est arcu ΘK ; quodque arcus $A B$, $Z K$ simul minores sunt ipsis ΔI , $E \Theta$ simul sumptis.

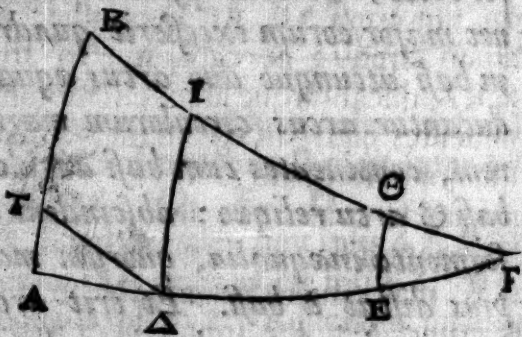
Fiat

Fiat ΔA ipsi $Z\Gamma$ æqualis, & ducatur AM continens cum AR angulum æqualem angulo Γ ; & erit AM ipsi ΓK æqualis, & ΔM ipsi KZ . Cum autem ΔA æqualis sit ipsi ΓZ , & $E Z$ ipsi ΔA , erit totus ΓE æqualis toti AN ; adeoque AN æqualis est ipsi $\Gamma \Theta$, & AN ipsi $E \Theta$, uti ΓK ipsi AM ; quare MN æqualis est ipsi ΘK . Sed (per 3^m II. *huj.*) arcus MN major est arcu IB ; quare IB minor est quam ΘK . Q. E. D.



Dico quoque quod AB , ZK simul minores sunt ipsis ΔI , $E \Theta$ simul sumptis. Quoniam enim (per eandem 3^m) arcus IM major est arcu BN ; adjiciatur utrinque AN , & erunt IM , AN simul majores quam AB . Est autem AN æqualis arcui $E \Theta$, quare AB minor est arcubus IM , $E \Theta$ simul sumptis. His adde arcum ΔM , hoc est ZK , utrinque; & erunt AB , ZK simul minores ipsis ΔI , $E \Theta$, simul sumptis. Q. E. D.

Si vero ponantur arcus æquales apud terminos arcus AG , ut AA , ΓE ; & ducantur arcus ΔI , $E \Theta$ constituentes angulos cum ipso AG æquales angulo A ; dico quod BI minor est quam $\Gamma \Theta$, & AB minor ipsis $\Gamma \Delta$, ΘE simul sumptis.



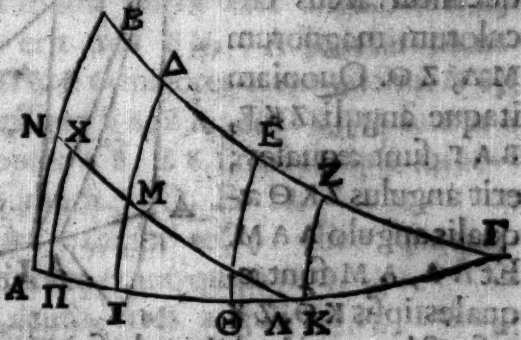
Ad punctum Δ cum arcu AG fiat angulus ΔAT æqualis angulo Γ ; cumque ΔA æqualis sit ipsi $E \Gamma$, & anguli, qui sunt apud arcus æquales in utroque triangulo $\Gamma \Theta E$, ΔAT , sint respective æquales; erit (per 14^m I. *huj.*) arcus AT ipsi $E \Theta$, & ΔT ipsi $\Gamma \Theta$ æquales. Sed ΔT major est quam IB ; quare $\Gamma \Theta$ major est quam IB . Cum autem arcus ΔI (per eandem) major sit quam BT ; si utrinque addatur arcus AT , qui æqualis est ipsi $E \Theta$, erit totus arcus AB minor utrisque ΔI , $E \Theta$ simul sumptis. Q. E. D.

In Codd. Arabicis. Prop. II. IV. & hoc Quinta in binas partes sunt; ita apud eos que sequitur loco Sexta Nona sit.

PROP. VI. THEOR.

Si in triangulo Sphaerico angulus aliquis non major fuerit recto, arcusque ipsum continentes fuerint inaequales, nec eorum major excederit quadrantem circuli; ac si abscindantur ex uno horum arcuum duo arcus aequales, à quorum terminis eductantur ad basim arcus circulorum magnorum, constituentes cum basi angulos aequales angulo quem continet basis cum arcu reliquo: abscident hi arcus à basi segmenta inaequalia, quorum quod adjacet lateri indiviso major erit reliquo. Quod si arcus divisus major fuerit reliquo; erit arcus indivisus, una cum arcu educto, qui adjacet angulo eidem arcui indiviso opposito, minor duobus arcubus intermediis simul sumptis. Si vero arcus divisus minor fuerit indiviso; erit arcus indivisus, una cum arcu qui adjacet angulo arcui indiviso opposito, major duobus reliquis arcubus intermediis.

In triangulo Sphaerico $AB\Gamma$, cujus angulus B non major sit recto, sint crura AB , $B\Gamma$ inaequalia, nec eorum major excedat quadrantem circuli; & capiantur in arcu $B\Gamma$ duo arcus aequales $B\Delta$, $E\Z$, ducanturque arcus circulorum magnorum ΔI , ΘE , $\Z K$, continentes cum basi $A\Gamma$ angulos aequales angulo A : dico quod ΔI major erit quam ΘK ; quodque si arcus $B\Gamma$, in quo capiantur duo arcus aequales, major fuerit quam AB , erunt AB , $\Z K$ simul minores arcubus ΔI , ΘE simul sumptis. Si vero $B\Gamma$ minor fuerit quam AB , erunt è contra AB , $\Z K$ simul majores ipsis ΔI , ΘE simul sumptis.



Ponatur ΓA ipsi ΓK æqualis, & ducatur arcus circuli magni $\Lambda M N$, continens cum ΛA angulum æqualem angulo Γ . Quoniam vero ΛI æqualis est ipsi ΓK , & angulus Γ æqualis angulo $M \Lambda I$, angulus vero K angulo $M I \Lambda$; erit (per 14^m I. majus) arcus

H

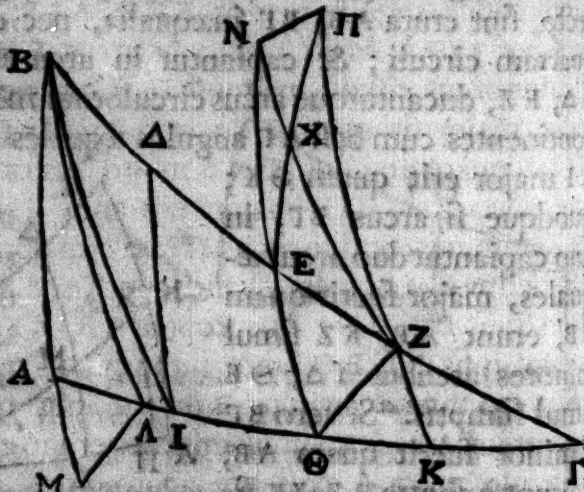
cus

cus ΓZ æqualis arcui ΛM , & KZ ipsi IM . Cumque arcus AB , $B\Gamma$ simul minores sint semicirculo; erunt anguli A, Γ simul minores duobus rectis, ac proinde arcus ΛM occurret ipsi AB . Occurrat ei ad N ; & erit MN (per 3^m II. *hujus*) major arcu ΔB . Fiat MX ipsi ΔB æqualis, & è puncto X ducatur arcus $X\Pi$, continens cum $\Lambda \Gamma$ angulum $X\Pi\Gamma$ æqualem angulo A . Quoniam vero $MX, \Delta B$ sunt æquales, uti sunt $\Delta B, ZE$ æquales; erunt quoque ZE, MX æquales: & $\Gamma Z, \Lambda M$ sunt æquales, quare totus arcus ΓE est æqualis toti ΛX . Angulo autem Γ æqualis est angulus $X\Lambda\Pi$, & angulus $X\Pi\Lambda$ æqualis est angulo $E\Theta\Gamma$; & arcus $X\Pi, E\Theta$ sunt singuli minores arcui AB quadrante minore; quare arcus $X\Pi, E\Theta$ simul non sunt æquales semicirculo: proinde arcus $X\Pi$ (per 16^m I. *hujus*) æqualis est ipsi $E\Theta$. Est etiam $\Gamma\Theta$ ipsi $\Lambda\Pi$ æqualis, uti ΓK ipsi ΛI ; restabit igitur arcus $K\Theta$ æqualis ipsi $I\Pi$, quo major est ΛI ; adeoque arcus ΛI major est arcu ΘK . Q. E. D.

Sit jam $B\Gamma$ major quam BA , & capiantur in $B\Gamma$ arcus æquales $B\Delta, EZ$, & ducantur $\Delta I, E\Theta, ZK$ continentes cum $\Lambda \Gamma$ angulos æquales angulo A : dico quod arcus AB, ZK simul minores erunt ipsis $I\Delta, B\Theta$ simul sumptis.

Primo sit angulus $B\Lambda\Gamma$ non minor recto; & producat arcus AB ad M , ita ut ΛM sit æqualis ipsi ZK . Jam autem ostensum est, quod ΛI

major est quam $K\Theta$: fiat igitur $\Lambda\Lambda$ æqualis ipsi $K\Theta$, & ducantur arcus circulorum magnorum $M\Lambda, Z\Theta$. Quoniam itaque anguli $ZK\Gamma, B\Lambda\Gamma$ sunt æquales; erit angulus $ZK\Theta$ æqualis angulo $\Lambda\Lambda M$. Et $\Lambda\Lambda, \Lambda M$ sunt æquales ipsis $K\Theta, ZK$



respective: erit igitur basis $Z\Theta$ æqualis basi ΛM , & angulus $KZ\Theta$ angulo $\Lambda M\Lambda$. Cum autem omnis trianguli Sphærici tres anguli sint majores duobus rectis, erunt anguli $\Theta ZK, Z\Theta K, ZK\Theta$ sive $E\Theta I$, majores duobus rectis: quare anguli $\Theta ZK, Z\Theta K, E\Theta I$ majores sunt angulis $Z\Theta K$

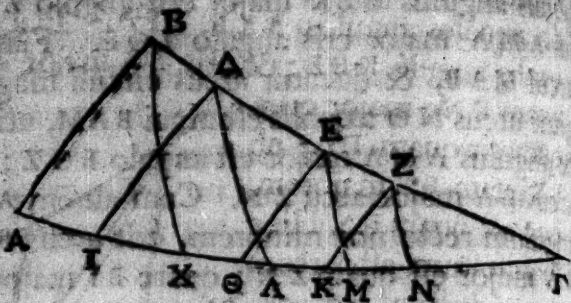
$Z\Theta E$

$Z \Theta E$ & $E \Theta I$. Auferantur communes $Z \Theta K$, $E \Theta I$, & reliquus angulus ΘZK major erit angulo $Z \Theta E$; adeoque angulus $\Lambda M \Lambda$ major erit angulo $Z \Theta E$. Fiat arcus $\Theta E N$ æqualis arcui $M \Lambda B$, & ducatur arcus circuli magni $Z N$. Quoniam igitur arcus $N \Theta$ æqualis est arcui $B \Lambda M$, uti arcus ΛM arcui $Z \Theta$, & angulus $\Lambda M \Lambda$ major est angulo $E \Theta Z$; erit (*per 8^m l. hujus*) arcus $B \Lambda$ major arcu $Z N$. Cum autem $A B$ constituit cum $A \Gamma$ angulum recto non minorem, erit arcus $B I$ major arcu $B \Lambda$; Et $B \Lambda$ major est quam $Z N$; quare $B I$ major est quam $Z N$. Cum vero arcus ΔI , $E \Theta$ constituunt cum $A \Gamma$ angulos æquales angulo Λ ; erit angulus $\Theta E B$ (*per 10^m l. hujus*) major angulo $\Lambda \Delta B$. Et angulus $\Theta E B$ æqualis est angulo $N E Z$: quare angulus $N E Z$ major est angulo $B \Delta I$. Fiat angulus $Z E X$ æqualis angulo $B \Delta I$; & erit arcus $B I$ major quam $X Z$, utpote qui major est quam $Z N$. Sed $B I$ major est quam $Z E$, quia $B \Delta$ æqualis est ipsi $Z E$, & $B I$ major est quam $B \Delta$: quapropter duci non potest, de puncto Z ad arcum $E X$, arcus circuli magni æqualis arcui $I B$, qui cadat inter puncta E , X . Cadat igitur extra arcum illum, sitque arcus $Z \Pi$ arcui $I B$ æqualis. Jam quoniam in duobus triangulis $B \Delta I$, $E \Pi Z$, duo anguli $\Pi E Z$, $B \Delta I$ sunt æquales, & æquales sunt arcus continentes duos alios angulos $\Pi Z E$, $\Delta B I$, hoc est arcus ΔB ipsi $Z E$, & $B I$ arcui $Z \Pi$ æqualis; reliqui vero duo anguli, nempe $E \Pi Z$, $\Delta I B$, sunt minores rectis: erit (*per 13^m l. hujus*) reliquus arcus $E \Pi$ æqualis reliquo ΔI . Ducatur arcus circuli magni $N \Pi$. Cumque arcus ΠZ , ipsi $B I$ æqualis, major sit quam $Z N$; erit angulus $\Pi N Z$ major angulo $N \Pi Z$: quare angulus $\Pi N E$ multo major erit angulo $N \Pi E$, atque adeo arcus ΠB major erit arcu $E N$. Adjiciatur arcus $E \Theta$ communis, & duo arcus ΠE , $E \Theta$ majores erunt duobus $N B$, $E \Theta$. Sed $N E \Theta$ æqualis est utrisque $B \Lambda$, $Z K$; & ΠE , $E \Theta$ sunt æquales ipsis ΔI , $E \Theta$: quapropter $A B$, $Z K$ simul sumpti minores sunt ipsis ΔI , $E \Theta$ simul sumptis. Q. E. D.

Si vero fuerit angulus $B \Lambda \Gamma$ minor recto: dico quoque quod arcus $A B$, $Z K$ simul minores erunt quam $E \Theta$, ΔI .

Angulo enim Λ existente acuto, tres anguli $\Delta I \Gamma$, $E \Theta \Gamma$, $Z K \Gamma$ fiunt acuti: adeoque fieri potest ut ducantur è punctis B , Δ , E , Z arcus æquales arcibus $B \Lambda$, ΔI , $E \Theta$, $Z K$, qui pariter cadant inter puncta Λ , Γ . Sint isti arcus $B X$, $\Delta \Lambda$, $E M$, $Z N$: & erunt omnes anguli $B X \Gamma$, $\Delta \Lambda \Gamma$, $E M \Gamma$, $Z N \Gamma$ obtusi, æquales vero inter se. Quoniam vero in triangulo $B X \Gamma$ angulus

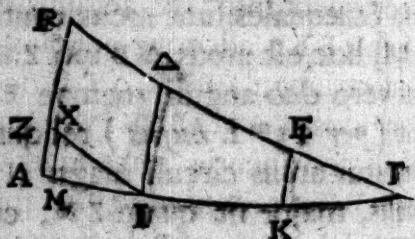
$\angle B\Gamma$ non est major recto, & ΓB major est quam $\angle B$, & $B\Gamma$ non major est quadrante; angulus autem $\angle B\Gamma$ est obtusus, & arcus $B\Delta$ arcui EZ æqualis est: erunt duo arcus BX , ZN simul minores duobus arcibus ΔA , EM ; ut ostensum



est in proxime precedentibus. Cum igitur BX æqualis sit ipsi BA , & ΔA ipsi ΔI , & EM ipsi $E\Theta$, & ZN ipsi ZK ; erunt duo arcus AB , ZK simul sumpti minores duobus ΔI , $E\Theta$ simul sumptis. Q. E. D.

Sed in triangulo $AB\Gamma$, si capiatur BA æqualis ipsi $E\Gamma$, & ducatur arcus ΔI , EK modo superius expolito: dico quod AI major est quam ΓK .

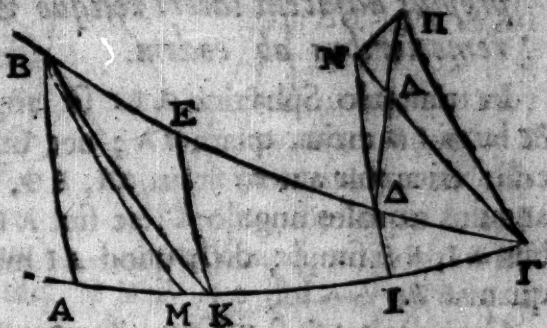
Ad punctum I super arcum AI constituatur angulus AIZ æqualis angulo Γ : ac manifestum est arcum IZ occurrere arcui AB , quodque IZ (per 3^m II. hujus) major est quam ΔB . Fiat IX ipsi ΔB æqualis, & de puncto X ducatur arcus XM ad basim $A\Gamma$, ita ut angulus $XM\Gamma$ sit æqualis angulo A . Quoniam itaque duo anguli $B\Gamma K$, $E\Gamma\Gamma$ trianguli $E\Gamma K$ sunt æquales duobus XIM , XMI trianguli XMI respective; & arcus $E\Gamma$, IX sunt etiam æquales, ob arcus æquales XI , ΔB ; arcus autem ΓH , IM simul sumpti, non sunt æquales semicirculo, neque arcus EK , XM : erit (per 16^m I. hujus) arcus ΓK æqualis arcui IM , quo major est arcus AI ; adeoque arcus AI major est arcu ΓK . Q. E. D.



Dico quoque quod AB minor est utrisque ΔI , EK simul sumptis.

Ponatur arcus IAN ipsi AB æqualis; & jam ostensum est quod AK major est quam IF . Fiat igitur AM æqualis ipsi IF , & ducantur BM , BK , FN . Jam quoniam BA æqualis est ipsi IN , & AM ipsi IF , & angulus BAM æqualis angulo NIF ; erit basis BM æqualis basi NI . Est autem angulus A non minor recto, quare arcus BK major est arcu BM ; & ob BM æqualem ipsi NI , erit arcus

arcus BK major quam NG. Pari autem ac in præcedentibus argumento constabit angulum BΔI majorem esse angulo KEB, ob æquales angulos AKE, AIA. Fiat igitur angulus ΓΔΛ æqualis angulo KEB; & erit BK major quam FA, quia major quam FN; major quoque erit quam ΓΔ, ob BK quam EB majorem, hoc est quam ΓΔ. Hinc manifestum est arcum de Γ ductum ad circumculum cuius est arcus ΔΛ, ipsique BK æqualem, non casurum inter puncta Δ, Λ. Sit ille arcus ΓΠ. Quoniam vero arcus ΓB major est quam BA, & ΓB non est major quartâ circuli; erit quidem arcus BK major quam BA, minor vero quartâ circuli; quapropter uterque arcus EB, BK minor est quadrante, & angulus BEK est obtusus, quia angulus ABΓ non major est recto; angulus igitur BKE (per 22^m I. huj.) acutus est. Cum autem ΓΠ æqualis sit ipsi BK, & ΓΔ ipsi EB; erit uterque ΓΔ, EΠ minor quadrante; & angulus ΓΔΠ est obtusus, quippe æqualis ipsi BBE; adeoque angulus ΔΠΓ etiam acutus est. Quocirca duo triangula BEK, ΔΓΠ duos habent angulos æquales, nempe angulos ΓΔΠ, BEK; & duo latera alium in utroque angulum continentia inter se æqualia, nempe BE ipsi ΓΔ, & EΠ ipsi BK; reliqui vero duo anguli sunt minores recto: arcus igitur ΠΔ (per 13^m I. hujus) erit æqualis arcui EK. Sed ΠΔ major est quam NΔ, adeoque, BK, ΔI simul sumpti superant arcum NΔI, quem fecimus æqualem ipsi AB. Q. E. D.



Propositio hæc apud Arabes in quinque diversis subdivisa est, eamque ultima XIII^{ma} habetur.

PROP. VII. THEOR.

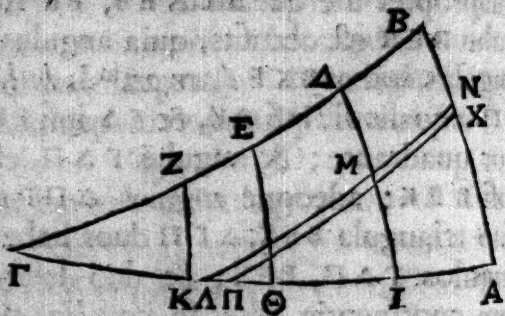
Si trianguli Sphaerici aliquis ex angulis non major fuerit recto, & latera ipsum continentia inæqualia, ita tamen ut majus eorum non excedat quadrantem circuli; & si ab eorum altero ad basim ducantur arcus continentes cum eâ angulos æquales angulo trianguli sub basi & reliquo latere contento; fuerit autem reliquum illud latus

latus una cum tertio & minimo arcu ducto æqualis duobus arcibus intermediis: abscindant hi arcus segmenta inæqualia tam è basi quam è latere illo; quorum quæ propius adjacent lateri reliquo & indiviso majora erunt remotioribus ab eodem.

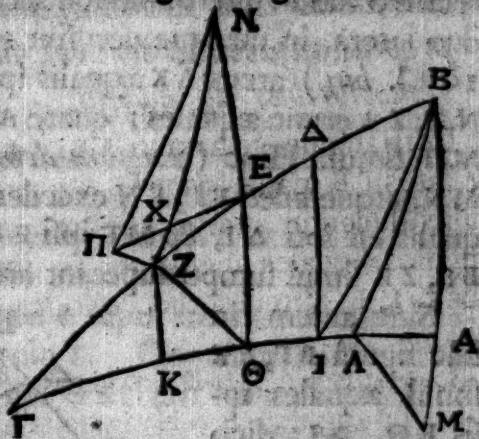
In triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sit angulus B non major recto, & latus ΓB majus quam BA ; nec sit $B\Gamma$ major quadrante circuli; ducantur autem arcus ΔI , $E\Theta$, ZK continentes cum $A\Gamma$ angulos æquales angulo A ; ac sint AB , ZK simul æquales arcibus ΔI , $E\Theta$ simul: dico quod AI major est quam ΘK , & $B\Delta$ quam EZ .

Capiatur $I\Lambda$ ipsi $K\Gamma$ æqualis, & ad Λ super arcum $A\Lambda$ constituatur angulus $A\Lambda N$ æqualis angulo Γ . Quoniam vero duo anguli trianguli $Z\Gamma K$ sunt respective æquales duobus angulis trianguli $\Lambda M I$, & arcus ΓK æqualis est arcui $I\Lambda$; erit (per 14^m I. *hujus*) arcus KZ æqualis arcui IM . Sed AB , KZ simul sunt æquales ipsis $I\Delta$, ΘE simul; quare, sublati æqualibus, AB æqualis erit ipsis ΘE , ΔM simul. Verum (per 3^m II. *hujus*) ΔM major est arcu BN : fiat igitur BX ipsi ΔM æqualis, & restabit XA æqualis ipsi ΘE . Ducatur arcus $X\Pi$ faciens cum $A\Gamma$ angulum æqualem angulo Γ ; æqualis igitur erit (per 16^m I. *hujus*) arcus $A\Pi$ ipsi $\Gamma\Theta$: totus itaque $A\Lambda$ major est quam $\Gamma\Theta$. Atqui $I\Lambda$ æqualis est ipsi $K\Gamma$: quapropter, sublati æqualibus, reliquus AI major erit reliquo ΘK .
Q. E. D.

Existente autem arcu ΓB majore quam AB : dico quod $B\Delta$ major est quam EZ . Quoniam enim AI demonstratus est major quam ΘK , ponatur $A\Lambda$ ipsi ΘK æqualis; & producat BA ad M , ita ut AM sit æqualis ipsi ZK ; & ducantur $B\Lambda$, BI arcus circulorum magnorum: jungatur etiam $Z\Theta$ arcus circuli magni; & (per 4^m I. *hujus*) arcus AM æqualis erit ipsi ΘZ . Producto autem ΘE , usque dum EN sit æqualis ipsi ΔI , ducatur arcus NZ : est igitur arcus BM æqualis ipsi ΘN . Angulus autem ΛMA (per ostensa in præced. 6^a) major est angulo $Z\Theta B$; quare



re arcus BA (per 8^m L. *bujus*) major erit quam ZN , atque adeo BI multo major quam ZN . Manifestum autem est angulum NEI majorem esse angulo $B\Delta I$: fiat igitur angulus NEX æqualis angulo $B\Delta I$, & erit XN minor quam BI . Sed BI major est quam ΔI , hoc est, quam NE ; quare arcus e ductus de N , ad circumulum cujus arcus est EX , & arcui BI æqualis, non cadet inter puncta E , X . Cadat itaque extra, ad modum arcus $N\Pi$. Et quoniam duo triangula $B\Delta I$, $NE\Pi$ duos habent angulos æquales, nempe angulos $NE\Pi$, $B\Delta I$; æquales autem sunt arcus comprehendentes duos alios eorum angulos, hoc est, BI arcui $N\Pi$, & ΔI ipsi NE æqualis; reliqui vero anguli non sunt recti, sed uterque acutus: manifestum est (per 13^m L. *bujus*) quod arcus $E\Pi$ æqualis est ipsi $B\Delta$. Sed $E\Pi$ major est quam BZ , ob $N\Pi$ majorem quam ZN ; atque adeo $B\Delta$ major est quam EZ . Q. E. D.



His præmonstratis, quod in propositione sexta omiffum videatur hic demonstrare licet: nempe quod, si fuerit latus trianguli divisum minus indiviso, erit latus indivisum, una cum arcu qui adjacet angulo lateri indiviso opposito, majus duobus reliquis intermediis. Si vero, iisdem positis, arcus extremi æquales fuerint intermediis simul sumptis, erit arcus è latere minore abscissus, qui adjacet majori, minor eo qui adjacet angulo eodem majori lateri opposito.

Jam vero in triangulo Sphærico $AB\Gamma$ sit angulus B non major recto, & latus AB minus quam $B\Gamma$, & $B\Gamma$ non majus quadrante; & capiatur in AB arcus $B\Delta$ æqualis arcui EZ , & ducantur ΔI , $E\Theta$, ZK sub angulis angulo Γ æqualibus: dico quod ΓB , ZK simul sumpti superant ipsos ΔI , $E\Theta$ simul sumptos.

Capiantur ΓA ipsi $I\Delta$, & ΓM ipsi ΘE , & ΓN ipsi ZK æquales, & ducantur arcus AX , $M\Pi$, NZ , sub angulis angulo A æqualibus. Jam quoniam $B\Delta$ est æqualis ipsi EZ , erunt BA , AZ æquales ipsis ΔA , AE simul. Cum autem duo triangula ΓAX , $A I \Delta$ duos

duos habeant angulos unius æquales duobus angulis alterius; arcus vero alteri æqualium angulorum oppositus in uno æqualis sit relativo suo in altero, nempe arcus $\Lambda \Gamma$ arcui ΔI ; reliqua autem duo latera in utroque non sint æqualia semicirculo: erit (per 16^m I. *huj.*) arcus ΛX æqualis ipsi ΔA . Pariterque $M \Pi$, $E A$; $N Z$, $Z A$ erunt æquales; quare $A B$, $N Z$ sunt æquales ipsis ΛX , $M \Pi$ simul. Hinc (per jam demonstrata) $B A$ major erit quam $M N$, atque adeo $B \Gamma$, ΓN excedent ipsos $\Lambda \Gamma$, ΓM . Sed $\Lambda \Gamma$ æqualis est ipsi ΔI , & $M \Gamma$ ipsi $E \Theta$, uti $N \Gamma$ ipsi $Z K$; quare ipsi $B \Gamma$, $Z K$ simul sumpti superant arcus ΔI , $E \Theta$ simul sumptos.

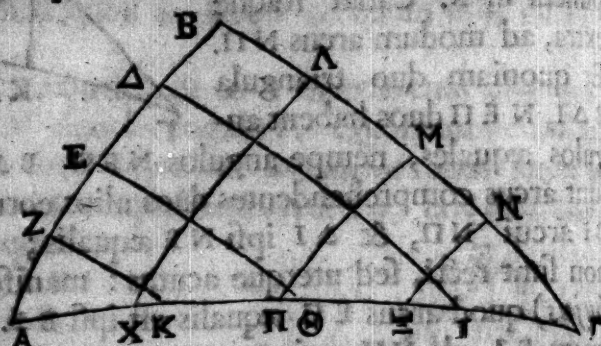
Sint autem in hac figura $B \Gamma$, $Z K$ simul æquales ipsis $E \Theta$, ΔI : dico quod $B A$ minor est quam $Z E$.

Consimili enim modo capiantur ΓA , ΓM , ΓN æquales ipsis ΔI , $E \Theta$, $Z K$; & ducantur ΛX , $M \Pi$, $N Z$, ut fecimus in priore. Quoniam autem $B \Gamma$, ΓN æquales sunt ipsis $\Lambda \Gamma$, ΓM ; erit $B A$ ipsi $M N$ æqualis: unde (per 8^m II. *hujus*) $A B$, $N Z$ simul minores erunt ipsis ΛX , $M \Pi$ simul sumptis. Demonstravimus autem ΔA , $E A$, $Z A$ æquales esse ipsis ΛX , $M \Pi$, $N Z$; adeoque $A B$, $A Z$ simul minores fient ipsis ΔA , $A E$: unde patet $B A$ minorem esse quam $E Z$. Nam si utrinque auferatur $A Z$, restabit $B A$ minor quam ΔA , $E Z$ simul: dein utrinque etiam tollatur arcus $E A$, & remanebit $E B$ minor quam ΔZ . Denique sublato communi ΔE , erit $B A$ minor quam $E Z$. Q. E. D.

Subordinata etiam hæc Arabibus in tres diversas, quarum ultima & 27^a tota alia Propositio merito censenda est.

PROP. VIII. THEOR.

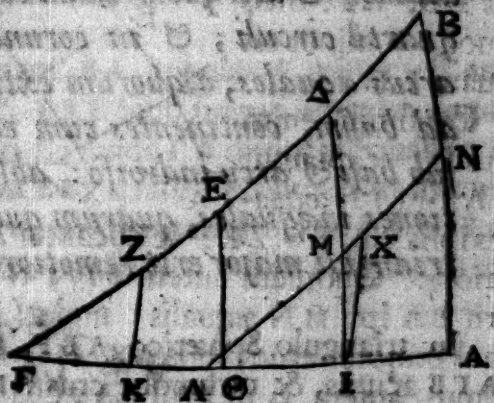
Si trianguli Sphærici angulus aliquis non major sit recto, arcus vero continentes illum sint inæquales, neque major eorum excedat circuli quadrantem; & si ducantur à majori eorum ad basim tres arcus circulorum magnorum, quorum duo contineant cum eâ angulos æquales contento sub basi & latere minore; absceindantur autem tam à latere



latere majore quam è basi, segmenta equalia illis que latere minori adjacent; & per puncta divisionum ducatur arcus tertius: erit angulus contentus sub arcu illo tertio & basi major contento sub basi & arcu minore.

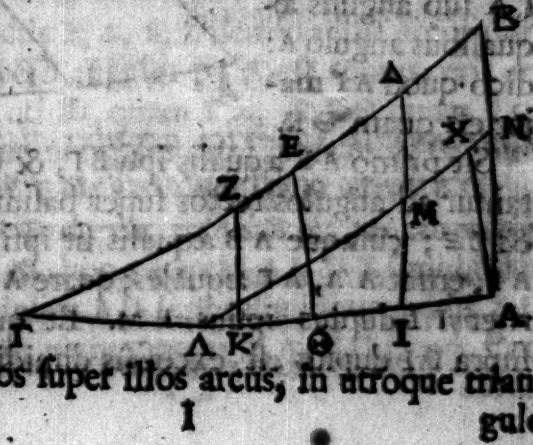
In triangulo Sphaerico ABF sit angulus B non major recto; & sit BF major quam BA , haud major vero quadrante; & ducantur arcus ΔI , $E\Theta$, ZK , ita ut anguli $\Delta I\Gamma$, $E\Theta F$ sint æquales angulo A ; fiat autem ΘK æqualis arcui ΔI , & $E Z$ ipsi $B\Delta$: dico angulum $ZK\Gamma$ majorem esse angulo A .

Fiat $I\Delta$ ipsi ΓK æqualis, & ad A super arcum AA constituantur angulus $\Delta\Lambda M$ æqualis angulo Γ . Quoniam itaque arcus ΔI æqualis est ipsi ΓK , & ΔI ipsi ΘK ; erit totus ΔA toti $\Gamma\Theta$ æqualis. Anguli autem super rectis illos, in utroque triangulo $E\Gamma\Theta$, $N\Delta A$ sunt respective æquales; quare (per 14^m I. huj.) arcus $B\Gamma$ æqualis erit ipsi $N\Delta$. Verum NM major est quam EZ , quia (per 3^m II. huj.) major quam $B\Delta$. Fiat igitur NX æqualis ipsi $N\Delta$, & ducatur IX . Cum autem reliquis ΔX æqualis sit ipsi ZF , & arcus ΓK , ΔI sint æquales, uti & angulus Γ angulo $X\Delta I$ æqualis; erunt arcus IX , ZK æquales, atque angulus $ZK\Gamma$ angulo $XI\Delta$. Sed angulus $XI\Delta$ major est angulo $M I\Gamma$ angulo A æquali; angulus igitur $ZK\Gamma$ major est angulo A . Q. E. D.



Quod si angulus $ZK\Gamma$ & alteruter è duobus angulis $\Delta I\Gamma$, $E\Theta F$ fuerint æquales angulo A , cæteris manentibus: dico quod angulus reliquus minor erit angulo A .

Fiat enim $I\Delta$ ipsi ΓK æqualis, & ad A super AA constituantur angulus $\Delta\Lambda M$ æqualis angulo Γ ; & ob arcus ΓK , ΔI æquales, sicut & duos angulos super illos arcus, in utroque triangulo

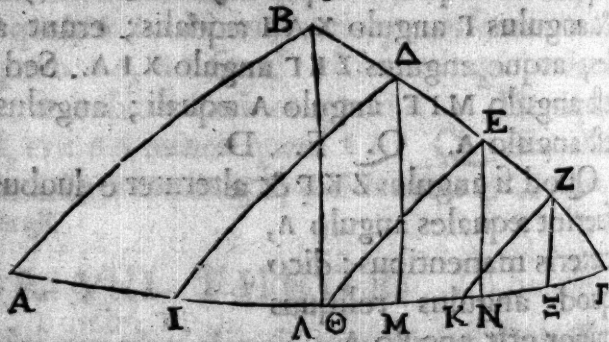


gulo ΓZK , ΛMI , etiam æquales; erit $Z\Gamma$ ipsi ΛM æqualis. Major autem est MN quam $B\Delta$: fiat igitur $M\chi$ æqualis ipsi $B\Delta$, & erit $\chi\Lambda$ æqualis ipsi ΓE . Quoniam igitur ΓK , ΛI sunt æquales, uti & $K\Theta$, $I\Lambda$ æquales; erunt toti $\Gamma\Theta$, ΛA æquales. Et $\chi\Lambda$, ΓE sunt æquales; adeoque $E\Gamma$, $\Gamma\Theta$ sunt æquales ipsis $\chi\Lambda$, ΛA , respective. Et angulus $E\Gamma\Theta$ æqualis est angulo $\chi\Lambda A$; quare basis $E\Theta$ æqualis est basi $\chi\Lambda$, & angulus $\chi\Lambda A$ æqualis est angulo $\Gamma\Theta E$. Angulus autem $\chi\Lambda A$ minor est quam $B\Lambda A$: angulus igitur $\Gamma\Theta E$ minor est angulo $B\Lambda\Gamma$. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si trianguli Sphærici uterque angulorum ad basim fuerit acutus, & uterque arcuum eosdem subtendentium minor quartâ circuli; & in eorundem non majore capiantur arcus æquales, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes cum ea angulos æquales contento sub basi & arcu indiviso: abscindent bi arcus è basi portiones inæquales, quarum quæ propior est arcui indiviso trianguli major erit remotiore ab eodem.

In triangulo Sphærico $AB\Gamma$, sit uterque angulorum $\Gamma A B$, $A\Gamma B$ acutus, & utrumque crus AB , $B\Gamma$ minus quadrante; & in crure $B\Gamma$, quod non sit majus altero, capiantur duo arcus æquales $B\Delta$, BZ , & ducantur arcus circulorum magnorum ΔI , $E\Theta$, ZK , occurrentes arcui ΓA sub angulis æqualibus angulo A : dico quod ΔI major est quam ΘK .



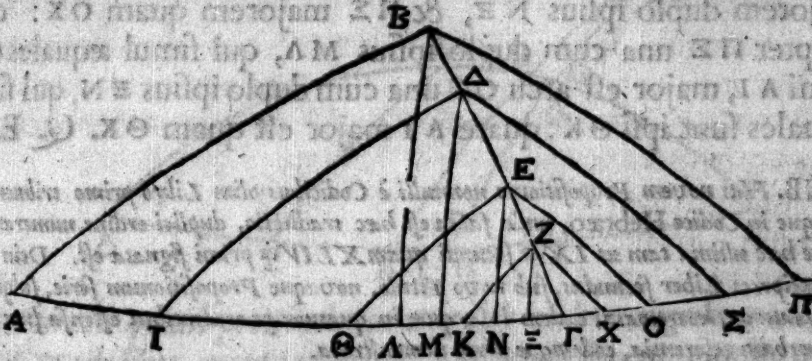
Sit primo AB æqualis ipsi $B\Gamma$, & de punctis B, Δ, E, Z demittantur ad angulos rectos super basim $A\Gamma$ arcus $B\Lambda$, ΔM , EN & $Z\Xi$; cumque AB æqualis sit ipsi $B\Gamma$, & $B\Lambda$ normalis super $A\Gamma$, erunt ΛA , $\Lambda\Gamma$ æquales; quare $\Lambda\Gamma$ duplus est ipsius ΛA : pariter ΓI duplus ipsius ΓM . Et quoniam excessus arcus $A\Gamma$ supra ΓI duplus est excessus dimidii ipsius $A\Gamma$ supra dimidium

arcus

arcus ΓI , sive ipsius $\Lambda \Gamma$ supra ΓM ; & excessus $\Lambda \Gamma$ supra ΓI est arcus ΛI , uti excessus arcus $\Lambda \Gamma$ supra ΓM est arcus ΛM , erit ΛI duplus ipsius ΛM . Pari argumento cum $\Gamma \Theta$ duplus sit ipsius ΓN , & ΓK duplus arcus ΓZ , erit excessus ipsius $\Gamma \Theta$ supra ΓK duplus excessus dimidiorum eorundem, sive arcus ΓN supra ΓZ : erit igitur arcus ΘK duplus ipsius $N Z$. Jam quoniam triangulum $\Lambda B \Gamma$ habet angulum B dimidium anguli $\Lambda B \Gamma$, adeoque non majorem recto; & latus ΓB majus quam $B \Lambda$, & ΓB non major est quarta circuli; & $B \Delta$ aequalis est ipsi $E Z$, & ΔM , $E N$, $Z \Xi$ cadunt super arcum $\Lambda \Gamma$ ad angulos aequales angulo $B \Lambda \Gamma$: erit (per prius demonstrata, in 6^{ta} II. *hujus*) arcus ΛM major quam $N Z$. Sed ΛI duplus est ipsius ΛM , & ΘK duplus ipsius $N \Xi$: quocirca major erit arcus ΛI quam ΘK . Q. E. D.

Sit jam arcus $B \Gamma$ minor quam $B \Lambda$: dico quod sic etiam ΛI major erit quam ΘK .

Quoniam $B \Gamma$ minor est quam $B \Lambda$, angulus Λ minor est angulo Γ , & anguli $\Delta I \Gamma$, $E \Theta \Gamma$, $Z K \Gamma$ sunt singuli aequales angulo Λ , adeoque minores angulo Γ ; unde $\Gamma \Delta$ minor est quam ΔI , & ΓE quam $E \Theta$, & ΓZ quam $Z K$: quare fieri potest ut ducantur à punctis B, Δ, E, Z arcus aequales arcubus $\Lambda B, \Delta I, E \Theta, Z K$ ad arcum $\Lambda \Gamma$, qui cadant extra punctum Γ . Sint hi arcus $B \Pi$,



$\Delta \Sigma, E O, Z X$: & de punctis B, Δ, E, Z demittantur arcus normales ad $\Lambda \Gamma$. Quoniam vero angulus $B \Gamma \Lambda$ est acutus, erit arcus $\Lambda \Gamma$ major quam $\Pi \Gamma$, uti $I \Gamma$ quam $\Gamma \Sigma$, & $\Gamma \Theta$ quam ΓO , & ΓK quam ΓX ; cadentque normales inter puncta Λ, Γ . Sint normales hi arcus $B \Lambda, \Delta M, E N, Z \Xi$: erit igitur arcus $\Lambda \Pi$ duplus arcus $\Pi \Lambda$, & arcus $I \Sigma$ duplus ipsius ΣM ; ac propterea excessus ipsius $\Lambda \Pi$ supra $I \Sigma$, hoc est arcus $\Lambda I, \Pi \Sigma$ simul, duplus erit excessus dimidii ipsius $\Lambda \Pi$ supra dimidium ipsius ΣI , hoc est ipsius $\Pi \Lambda$ supra ΣM , nempe arcus $M \Lambda, \Sigma \Pi$ simul. Pari

modò quia $\Theta\Theta$ duplus est arcus ΘN , & KX duplus ipsius ΘK ; excessus arcus ΘO supra KX , hoc est ΘX , $K\Theta$ simul, duplus erit excessus dimidii ipsius $\Theta\Theta$ five ΘN supra dimidium ipsius KX five KZ , hoc est NZ , ΘX simul. Quoniam vero angulus ΓBA minor est recto, manifestum est arcum BF maiorem esse arcu BA ; nec BA neque BF excedere quadrantem. Sed BA æqualis est ipsi EZ ; & arcus ΔM , BN , $Z\Xi$ faciunt angulos æquales angulo Λ : quare (per 6^m II. huj.) arcus ΔM major est quam NZ . Et quoniam in triangulo $AB\Gamma$ normalis de B demissus cadit inter puncta A , Γ , erit angulus ΠBT minor dimidio anguli $AB\Gamma$, adeoque angulus ΠBT non est major recto. Uterque autem arcum ΓB , $B\Gamma$ minor est quadrante, & arcus BA æqualis est ipsi EZ , ac ducuntur arcus ΔZ , $E O$, $Z X$ sub angulis angulo Π æqualibus super arcum ΠF ; erit igitur (per 6^m II. huj.) arcus ΠZ major quam ΘX . Nuper autem demonstravimus ΔI , ΠZ simul duplum esse ipsorum ΔM , $Z\Xi$ simul, hoc est duplum arcus ΔM cum duplo ipsius ΠZ simul æqualem esse arcibus ΔI , ΠZ simul; ac sublato communi ΠZ , restabit ΔI æqualis ipsi ΠZ una cum duplo ipsius ΔM . Eodem argumento erit $K\Theta$ æqualis arcui ΘX cum duplo ipsius ΞN . Ostensum autem est ΔM maiorem esse quam ΞN , adeoque duplum ipsius ΔM maiorem duplo ipsius NZ , & ΠZ maiorem quam ΘX : quapropter ΠZ una cum duplo ipsius ΔM , qui simul æquales sunt arcui ΔI , major est arcu ΘX una cum duplo ipsius ΞN , qui simul æquales sunt ipsi ΘK : quare ΔI major est quam ΘK . Q. E. D.

NB. Has novem Propositiones nonnulli à Codicibus olim Libro primo tribuerunt; adeoque in Codice Hebræo, unde facta est hæc translatio, duplici ordine numerantur; atque hæc ultima tam in IX^{ta} secundi quam XLIV^{ta} primi signata est. Dein quasi hic inciperet Liber secundus, sub novo Titulo, novæque Propositionum serie, subiunguntur quatuor Theorematum, eadem ipsa quæ in quatuor præcedentibus ostensa sunt quasi ad verbum referentia, eodemque modo demonstrata.

Qui si usus huius recapitulationis sane non liquet, quapropter loco hæud alieno visum est Scholion inferere, totius rei summam paulo plenius & accuratius exhibiturum.

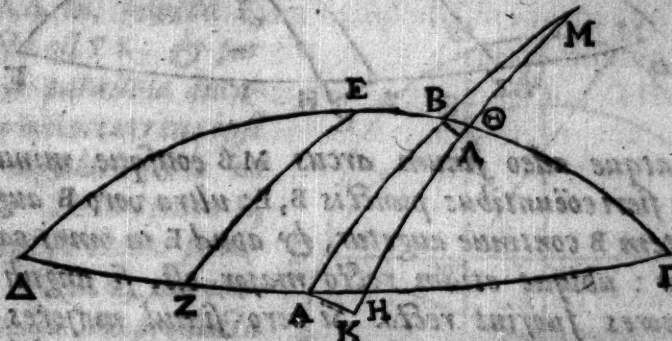
SCHOLION.

Recte quidem cautum est à Menelao in ultimis Propositionibus, ne angulus sub cruribus contentus major sit recto; neque cras majus; in quo sumuntur arcus æquales, vel ad quem ducuntur arcus cum basi angulos æquales constituentes, excedat circuli quadrantem: aliter enim incidisset in ambiguum, ob Distorisum

risimum in Sphaericis satis difficilem, & ut videtur Veterum methodis inaccessum. Euclides enim in Phaenomenis, & post eum Hipparchus, nihil protulere de Zodiaci signis maximo tempore orientibus: ejusque rei rationem reddens Pappus Prop. 36. Lib. VI Collect. Math. haec habet, *ἡμετέριον δὲ ἡμεῖς ἀνέκαθεν οὕτως ἀνατολὴν διεσώψαμεν*. Idemque Pappus eo loci testatur Menelai nostri hac de re existisse dissertationem, quae temporum injuria olim periisse videtur.

Nequid autem hac in parte desideraretur, Diorisimum hunc plenius affecti sumus; ac rem Sphaerica tractantibus adhuc intactam accuratius perpendere constituimus. Ignoscat tamen Lector si in hoc Parergo nonnulla assumpserimus Auctoris nostri aeo nondum comperta.

Pone arcum AT basim esse trianguli ABT , apud quam sunt constantos anguli, latus indivisum AB , divisum vero BT ; ac sit uterque angulus A , T acutus, A vero primo major sit quam T . Producantur arcus AT , TB ad occursum in Δ , & bisecetur semicirculus $\Gamma\Delta$ in puncto B , & ducatur arcus BZ , constituens cum AT angulum aequalem angulo A ; & erit EZ , maximus arcuum sub eodem angulo inter arcus ΔBT , ΔAT ducendorum. Arcui

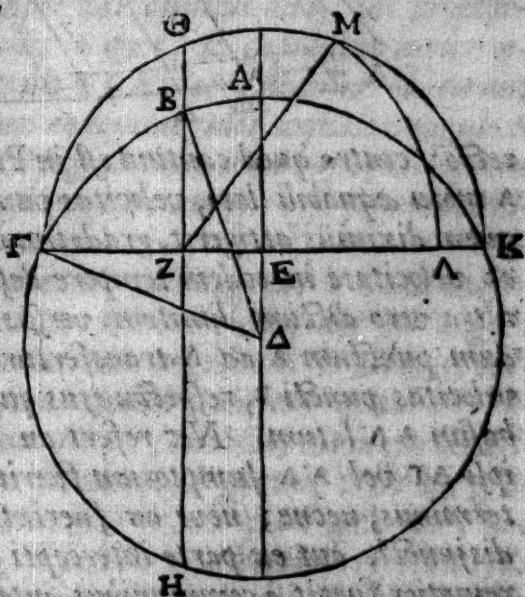


autem AB quam proximè ducatur sub eodem angulo arcus ΘH , qui productus occurrat arcui AB producto in puncto M : & centro M , intervallo MB , describatur arcus circuli minoris BA ; eodemque centro & intervallo MA describatur arcus circuli AK ; qui magnus erit circulus, quia (per 10^m I. huj.) arcus AM , MH simul sumpti sunt aequales semicirculo. erit igitur arcus momentaneus AK ad momentaneum BA sicut semidiameter Sphaerae ad semidiametrum circuli cujus arcus est BA , hoc est ad sinum arcus MB , qui complementum est arcus AB ad quadrantem. Est autem arcus BA ad arcum ΘB sicut sinus anguli B ad radium: ex aequo itaque arcus AK ad

erit angulus B semper obtusus; vel si majores recto fuerint, in ea saltem parte quadrantis ΓE , quæ versus E, erit angulus ille obtusus; ac proinde minuitur sinus ejus, interea dum sinus arcus MB etiam decrescit. Quoties igitur fieri potest ut inter E, Γ inveniatur situs arcus AB, talis ut sinus arcus MB in eadem ratione minuiatur qua sinus anguli B; angulus AB Γ semper obtusus fit, arcusque B Γ quadrante minor. Si igitur B Γ minor fuerit quadrante, ac simul angulus AB Γ recto major; vel si angulus A B Δ fuerit recto minor, & arcus B Δ quadrante major, incidere possumus in ambiguum supra dictum: Menelaus igitur in præcedentibus Propositionibus non sine causa admonuit arcum divisum B Γ quadrante majorem non esse debere, neque angulum AB Γ majorem recto.

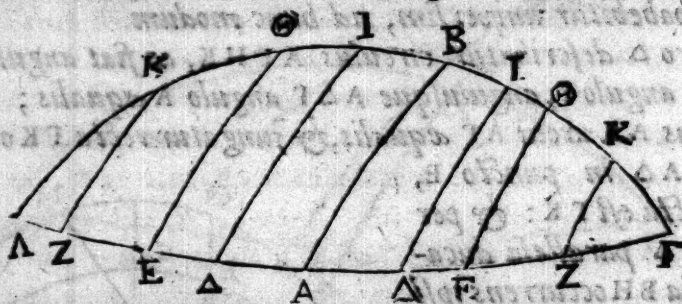
Ut autem in omni casu cognoscatur punctum B, tale ut arcus momentaneus AH ad arcum B Θ maximam obtineat rationem, manentibus scilicet angulis A & Γ , compositione satis expedita habebitur universim, ad hunc modum.

Centro Δ describatur circulus A Γ HK, ac fiat angulus A Δ B æqualis angulo Γ , angulusque A Δ Γ angulo A æqualis; & ponatur arcus AK arcui A Γ æqualis, & jungatur recta ΓK occurrens ductæ A Δ in puncto E, quobisecta est ΓK : & per B ipsi A Δ parallela ducatur recta BH occurrens ipsi ΓK ad angulos rectos in puncto Z. Dein centro E, radio ΓE , describatur semicirculus $\Gamma \Theta MK$, cui conveniat recta BH producta in puncto Θ ; & erit Z Θ media proportionalis tam inter ZH, ZB, quam inter Z Γ , ZK. Capiatur etiam Z A media proportionalis inter Z Θ , ZH; & erit Z A maxima è tribus medie proportionalibus inter ZH, ZB, sive inter summam & differentiam sinuum complementorum arcuum AB, A Γ ad quadrantes. Denique centro Z, intervallo Z A, describatur arcus circuli A M, occurrens semicirculo $\Gamma \Theta K$ in M, & ducatur recta ZM: dico arcum



arcum MA similem esse arcui BF in precedente figura; hoc
est, angulum KZM , quem subtendit arcus MK , æqualem esse
angulo ad centrum $Sphærae$, quem subtendit dictus arcus BF ,
quoties ita divisus sit quadrans FE in B , ut ratio arcus AH ad
 EB maxima fiat.

Invento autem hoc Diorismo, jam paulo audentius hujus Libri Secundi Theoremata aliqua proponere, pleniusque exsequi licebit. Manentibus enim angulis acutis Λ , Γ , quorum Λ major sit, productisque lateribus $\Gamma\Lambda$, ΓB ad occursum in Λ ; inventatur punctum B in semicirculo $\Gamma B\Lambda$, juxta præscriptum Regule præcedentis; ita ut arcus ΛB situs sit, ubi maxima sit ratio momentorum. Jam si ab utraque parte ipsius Λ capiantur duo arcus æquales, ut $\Lambda\Delta$, EZ , vel in basi $\Lambda\Gamma$ vel in $\Lambda\Lambda$, ac ducantur ad latera $B\Gamma$ vel $B\Lambda$ arcus ΔI , $E\Theta$, ZK : manifestum est arcum $B I$, in utroque casu, minorem esse arcu ΘK ; tanquam si arcus $B\Lambda$ major sit quadrante, atque angulus $\Lambda B\Gamma$ major



recto; contra quod cautum est in Prop. V^{ta} hujus. Puncto enim A motu æquabili lato, velocitas puncti B, usque dum limitem quem diximus attigerit, gradatim minuitur; atque adeo arcus ea velocitate in eodem tempore descripti, continue decrescant: ultra vero dictum limitem versus A denovo crescant, interea dum punctum A ad A transfertur. Ad A autem maxima fit velocitas puncti B, respectu ejus quam habet punctum A juxta basim A A latum. Nec refert an alter arcuum æqualium in ipso AΓ vel A A sumptorum fuerit punctis E, A vel A, A terminus, necne; neve an fuerint arcus æquales continui aut disjuncti, aut ex parte intercepti ab invicem; modo arcus ΔI remotior fuerit à communibus intersectionibus Γ aut A quam est arcus ZK.

*Eodemque modo, si ponatur punctum B motu equabili ferri
per arcum $\Gamma B A$, manifestum est ex præmissis spatia descripta
motu puncti A in æquali fieri; eoque motu gradatim aucto,
juxta*

juxta A velocitatem ejus maximam prevenire. Unde si in cruce trianguli majori BF vel BA capiantur ab utraque parte ipsius B duo arcus aequales BI, Θ K; ac ducantur ad basim arcus I Δ , Θ E, K Z; erit segmentum basis AA ab iisdem interceptum majus intercepto E Z; quocunque ordine capiantur dicti arcus aequales, modo sint inter B, I vel B, Δ , ac K Z propior fuerit intersectioni basis Θ cruris divisi quam arcus Δ I. Quid quidem ex parte tantum demonstratum dedit Menelaus in VI^{ta} hujus.

Fieri autem potest ut maxima trium medie proportionalium, inter summam Θ differentiam Sinuum complementorum utriusque anguli A, I ad angulos rectas, major sit quam summa Sinuum ipsorum angulorum, id est, in Fig. pag. 71, ut Z Δ major sit quam Z K, quo in casu circulus centro Z intervallo Z Δ descriptus minime occurret semicirculo I Θ K. Hoc quoties sit, Diorismus de quo agitur locum non habet; atque ubicunque sumpseris duos arcus aequales in basi I A Δ , ac duxeris ad semicirculum I B A arcus, ut prius; erit segmentum illud ex eadem abscissum, quod propius est angulo I, minus altero ab eadem remotiore: motus enim puncti B optimus tardissimus fit ad I, uti semper velocissimus ad Δ . Ac propterea talibus existentibus angulis A Θ I, si capiantur arcus aequales utcumque in semicirculo I B A; ac ducantur ab eorum terminis ad basim arcus cum eadem angulos aequales angulo A constituentes: manifestum est segmentum illud basis, ab iisdem interceptum, quod propius est angulo I, majus esse segmento altero, remotiore scilicet ab eodem.

Hoc autem accidere nequeant, nisi angulus I baud major sit angulo cujus sinus aequatur trienti radii, hoc est angulo $19^{\circ} . 28' . 16''$; in quo casu extremo angulus A fit pueror, estque $35^{\circ} . 15' . 52''$; cujus sinus potest trientem quadrati radii. Si vero angulus I minor fuerit praedicto, utrinque limitibus coercetur angulus A; ut si, exempli gratia, I sit 19 graduum, angulus A major esse nequit quam $41^{\circ} . 41' . 42''$, nec minor quam $29^{\circ} . 18' . 18''$, si puncti B velocitas, respectu ejus quam habet punctum A, minima fuerit in puncto I. Unversim autem, posita r aequali tangenti complementi anguli dati I ad rectam, Θ $r =$ radio, duae radices sive x in hac aequatione $2x + 123 - 112x + r^2 = 0$ erunt tangentes semisummae angulorum I Θ A in utroque casu, unde Θ uterque angulus

gulus A datus erit. Nec video an leuiori opera hæc omnia accuratè definiri queant. Observandum tamen duos illos angulos A una cum angulo Γ simul sumptos conficere angulum rectum: cuius rei demonstrationem nondum affecutus sum.

Si vero angulus A æqualis vel minor fuerit angulo Γ , eadem ipsa evenient quæ in prius descriptis, sed absque interveniente Diorismo. Nam si punctum B motu æquabili feratur per arcum $\Gamma B A$, velocitas puncti A continuo augebitur, ac proinde arcus, velocitatibus illis æqualibus temporibus descripti, quo lon-



gius absunt à puncto Γ , eo majores sunt: id quod à Menelao in 4^{ta} & 9^{na} hujus docetur. Idem etiam dicendum, si angulus Γ fuerit obtusus, A vero minor eo qui ipsi Γ deinceps est. Arcus autem divisus $B\Gamma$, in utroque casu, major esse nequit eo cuius sinus est ad radium sicut sinus anguli A ad sinum anguli Γ , existente scilicet arcu AB quadrante circuli.

Restat jam ut pauca subjiciam de altera parte harum Propositionum; nempe quod si capiantur duo arcus æquales in latere trianguli majore, ac ducantur ad basim arcus cum eadem angulos æquales constituentes, erunt duo extremi ex his ductis arcibus simul sumpti minores duobus intermediis: E contra vero, si sumantur arcus illi è minore latere, erunt arcus extremi majores intermediis simul sumptis. Horum prius verum quidem est in omni casu absque limite, nec refert an angulus B fuerit obtusus vel acutus, aut $B\Gamma$ major vel minor quadrante, modo angulus A major sit angulo Γ . In altero vero ubi angulus Γ major est angulo A, sive Γ obtusus fuerit vel acutus, arcus indivisus $B\Gamma$ è quatuor ductis maximus non major esse potest quadrante, eoque necessario minor est arcus divisus $B\Gamma$, uti rectè monitum est in ultima parte Prop. VII^{ma} hujus.

Denique si capiantur in basi duo arcus æquales, ac ducantur ad latus alterutrum cujuscunque trianguli Sphærici qua-

tuor

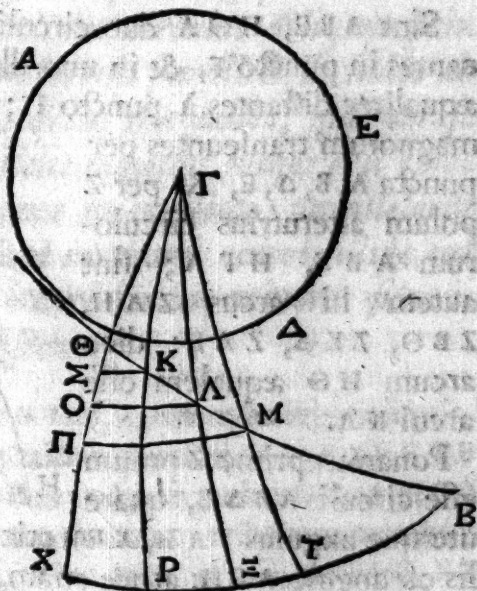
tuor arcus continentes cum basi angulos æquales, erit in omni casu summa arcuum intermediorum major extremis simul sumptis, absque conditionibus quæ requiruntur in Propositione V^{ta}. Sed ad Menelaum redeamus.

His igitur præmonstratis, sequentia subjunximus ad verificanda ea quæ habentur in libro Theodosii de Sphæra, cum eorundem converfis : sed modo magis universali & qui assensum extorqueat, tam ad stabilienda principia, quam ad demonstranda ea quæ prius scripta sunt ; quorum quidem nonnulla vix satis firma videntur.

PROP. X.

Si fuerit in Sphæra circulus magnus quem tangit aliquis è circulis parallelis ; & capiantur in eo duo arcus æquales inter punctum contactûs & maximum parallelorum ; & describantur per terminos horum arcuum, tam circuli paralleli, quam circuli magni prodeuntes è polo : tum abscindant hi circuli paralleli ex iis qui de polo ducuntur arcus inæquales, quorum qui maximo parallelorum propior est major erit remotiore. Et præterea portio illa maximi parallelorum circulis de polo ductis abscissa, quæ propior est communi circuli obliqui & circuli parallelorum maximi intersectioni, minor erit remotiore ab eadem

Sit $\odot MB$ circulus magnus Sphærae, quem contingat aliquis circulus parallelorum $A\Delta B$, sitque parallelorum maximus BTZ ; & in ipso $\odot B$ capiantur duo arcus æquales $\odot K$, ΛM ; & per polum Γ perque puncta $\odot$, K , Λ , M ducantur arcus circulorum magnorum $\Gamma\odot X$, $\Gamma K P$, $\Gamma\Lambda Z$, $\Gamma M T$; jungantur etiam circuli paralleli transientes per puncta K , Λ , M , nempe arcus $K\Sigma$, ΛO , $M\Pi$:



K 2

Dico

dico quod arcus ΠO major est arcu $\Sigma \Theta$, quodque arcus XP major est arcu ΣT .

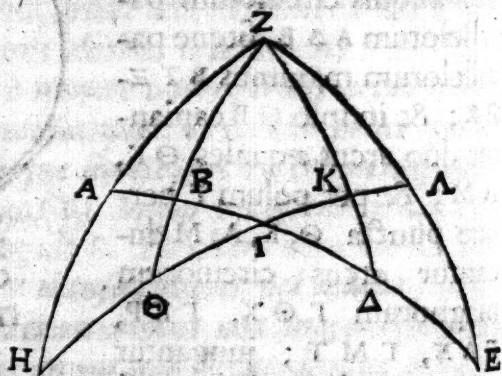
Quoniam enim $M \Gamma \Theta$ triangulum est Sphæricum, cujus crura $M \Gamma$ majus est crure $\Gamma \Theta$; ac utrumque minus est quadrante; & in ΘM sumuntur arcus æquales ΘK , ΛM ; necessario consequitur, per ea quæ demonstravimus in 33^a I. & 7^{ma} II. hujus, angulum $\Theta \Gamma K$ majorem esse angulo $\Lambda \Gamma M$, atque arcum XP majorem arcu ΣT ; quodque arcus $M \Gamma$, $\Gamma \Theta$ simul sumpti superant ipsos $\Lambda \Gamma$, ΓK simul sumptos; unde manifestum est arcum ΠO majorem esse arcu $\Sigma \Theta$.

NB. Hanc propositionem V^{am} & V^{am} & IX^{am} Lib. III. Sphæricorum Theodori complecti.

P R O P. XI.

Sese interfecent duo circuli in Sphæra maximi, & in eorum uno capiantur duo arcus æqualiter distantes à puncto sectionis duorum illorum circularum; & per terminos horum arcuum, perque polos alterutrius circularum, transeant circuli maximi: abscindant hi circuli ex altero circularum primorum arcus æquales.

Sint ABE , $H\Theta\Lambda$ duo circuli magni Sphære, sese interfecantes in puncto Γ , & in uno illorum capiantur arcus AB , ΔE æqualiter distantes à puncto Γ ; & ducantur arcus circularum magnorum transeuntes per puncta A , B , Δ , E , & per Z polum alterutrius circularum ABE , $H\Gamma\Lambda$; sint autem hi arcus ZAH , $ZB\Theta$, $ZK\Delta$, $Z\Lambda E$: dico arcum $H\Theta$ æqualem esse arcui $K\Lambda$.



Ponamus primo Z polum esse circuli $AB\Delta E$, quare uterque angulus ΓAH , $\Lambda E\Gamma$ erit rectus. Et angulus $\Lambda \Gamma E$ æqualis est angulo $\Lambda \Gamma H$; atque etiam arcus $\Lambda \Gamma$ æqualis est arcui ΓE : quare arcus ΓH æqualis est arcui $\Gamma \Lambda$. Parī argumento constabit

stabit arcum $\Theta \Gamma$ æqualem esse arcui $K \Gamma$; reliquus igitur arcus ΘH æqualis est arcui $K \Lambda$.

Ponamus autem punctum Z polum esse circuli $\Lambda \Gamma H$; & erunt duo anguli $\Lambda H \Gamma$, $\Gamma \Lambda E$ recti. Angulus autem $\Lambda \Gamma H$ æqualis est angulo $\Lambda \Gamma E$, uti arcus $\Lambda \Gamma$ æqualis arcui ΓE ; & duo arcus ΛH , ΛE simul sumpti non sunt æquales semicirculo, quia uterque est quadrante minor: arcus igitur $H \Gamma$ (per 16^m l. huj.) æqualis est arcui $\Gamma \Lambda$. Ac simili modo demonstrabitur arcum $\Theta \Gamma$ æqualem esse arcui ΓK : arcus igitur reliquus ΘH æqualis est $K \Lambda$. Q. E. D.

Hæc est 13^a III. Sphaericorum Theodosii.

P R O P. XII.

Si fuerit circulus Sphære maximus, quem contingat aliquis è circulis parallelis; & inter punctum contactus & parallelorum maximum capiantur duo arcus æquales; & ducantur arcus circulorum per terminos sumptorum arcuum transeuntes, quorum aliqui sint arcus circulorum parallelorum, aliqui vero magnorum vel per parallelorum polos transeuntium, vel unum aliquem eundemque circulum parallelum, sed priori parallelo minorem, contingentium, & ad easdem partes super maximum parallelorum, ad quas inclinatur circulus obliquus prius dictus, inclinantium: tum circuli paralleli sic ducti abscindunt è maximis ductis arcus inæquales, quorum qui propior est circulo è parallelis maximo major erit remotiore. Quinetiam portiones in maximo parallelorum abscissæ, quæ propiores sunt communi circuli illius cum circulo obliquo primario intersectioni, minores fient iis quæ ab eadem longius distant.

Sit circulus Sphære magnus $A M B$, quem contingat aliquis è circulis parallelis $A \Delta E$, & sit maximus parallelorum $\Gamma X P Z T B$; & in circulo $A M B$ capiantur duo arcus æquales ΘK , ΛM ; & describantur circulorum arcus transeuntes per horum terminos, è parallelis quidem arcus $K Z$, ΛO , $M \Pi$, è magnis vero, $K P$, ΛZ , $M T$, vel per polos eorum transeuntes, vel qui omnes contingant

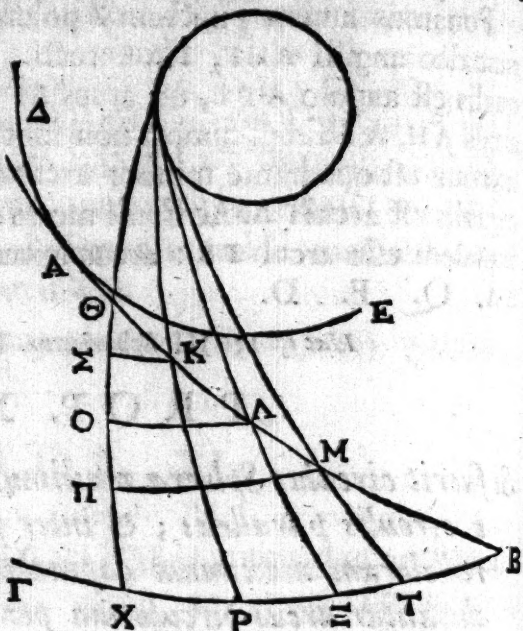
tingant eundem circulum parallelum minorem circulo $\Delta\Delta\Gamma$, & ad idem latus ad quod inclinatur circulus $\Delta\Delta\Gamma$ inclinati sine super circulum $\Gamma\Delta$: dico quod ΠO major est quam $\Theta\Sigma$, & XP quam ΞT .

Quoniam angulus $\Theta B\Gamma$ minor est recto, angulus vero $\Theta X B$ non minor recto, erit arcus ΘX minor arcu ΘB . Cum itaque triangulum $B\Theta X$ habet cruribus $B\Theta$ majus crure ΘX , neque $B\Theta$ majus est quadrante circuli, nec angulus Θ major est recto, & ex arcu $B\Theta$ abscissi sunt duo arcus æquales ΘK , ΔM ; ducuntur etiam arcus KP , $\Delta\Xi$, MT constituentes cum basi $B\Gamma$ angulos æquales angulo $\Theta X B$ eidem relativo: & erit arcus XP (per 7^m II. *hujus*) major arcu ΞT , & erunt duo arcus ΘX , MT simul sumpti minores duobus arcibus KP , $\Delta\Xi$ simul sumptis; hoc est, arcus ΘX , $X\Pi$ simul sumpti minores erunt ipsis ΣX , XO simul sumptis. Hinc constabit ΠO majorem esse arcu $\Theta\Sigma$. Angulus autem $B\Theta X$ non major erit recto, uti dictum est, quia in triangulo $BX\Theta$ angulus ad X non minor est recto, latera vero alium ejus angulum, nempe angulum ad Θ , continentia sunt singula minora quadrante circuli. Demonstratum autem est in libro primo Prop. XXI, quod, si hæc ita se habeant, angulus contentus $B\Theta X$ non major erit recto. Q. E. D.

Hæc VII^{ma} & VIII^{va} Libri III. Theodosii demonstrantur.

P R O P. XIII.

Si in Sphæra fuerit circulus magnus quem contingat aliquis è circulis parallelis, & inter punctum contactus & maximum parallelorum capiantur in eo duo arcus æquales, per quorum terminos ducantur circuli, quorum aliqui sint paralleli, aliqui vero circuli maximi qui
contin.



contingant unum eundemque è parallelis parallelo vero priori majorem; neque opus est ut sit inclinatio ejus ad easdem partes ad quas inclinatur circulus ille primarius, in quo sumpsimus arcus æquales: tum circuli paralleli abscindunt è circulis maximis ductis arcus inæquales, quorum minor erit qui propior est parallelorum maximo. Abscindunt etiam iidem circuli magni è maximo parallelorum arcus inæquales, quorum qui propior est communi circuli magni primarii & maximi parallelorum intersectioni, minor erit remotiore ab eadem.

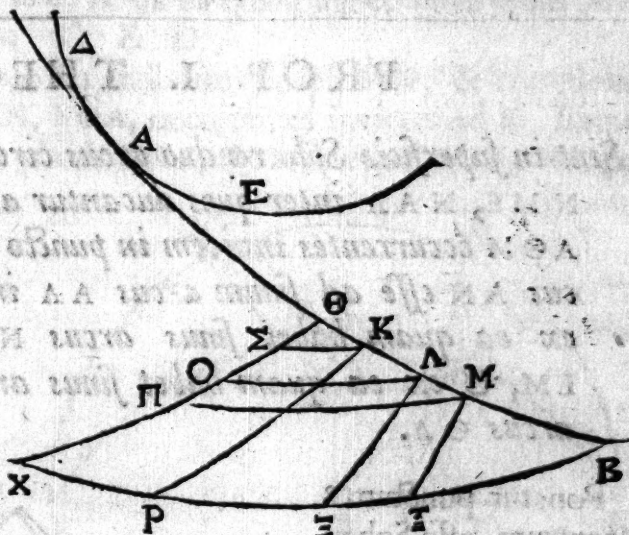
Tangat enim circulum maximum AB circulus aliquis è parallelis unus, qui sit AΔE; maximus autem parallelorum sit BΞX, & in arcu AB capiantur duo arcus æquales ΘK, ΛM; per quorum terminos describantur circuli paralleli KΣ, ΛO, MΠ, aliique circuli maximi ΘX, KP, ΛZ, MT, quos omnes contingat idem circulus parallelus cir-

culo AΔE major: dico quod arcus ΠO minor est arcu ΣΘ, quodque arcus TΞ minor est quam XP.

Quoniam enim in triangulo ΘBX latus XΘ majus est latere ΘB, at non majus quadrante circuli, &

in arcu BΘ sumuntur duo arcus æquales ΘK, ΛM, à quibus ducuntur arcus KP, ΛZ, MT, continentes cum basi angulos æquales angulo apud X iisdem relativo; erit arcus XP (per 9^m Π. hujus) major arcu TΞ; itemque arcus ΘX, MT simul sumpti (per demonstrata in 7^{ma} Π. hujus) majores erunt arcubus intermediis KP, ΛZ: quare duo arcus ΘX, XΠ simul sumpti sunt majores duobus ΣX, XO simul sumptis: unde constabit arcum ΘΣ majorem esse arcu OΠ. Et ex præcedentibus manifestum est quomodo consequatur conversa hujus.

M E N E.



[80]

MENELA

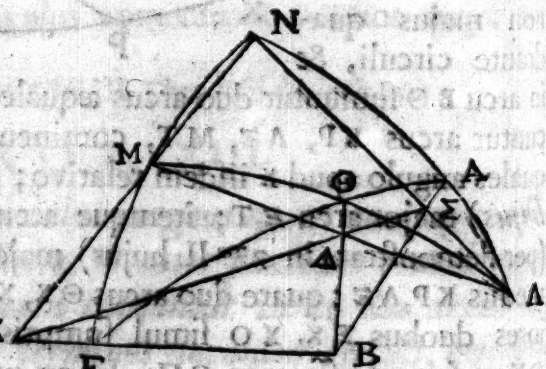
ALEXANDRINI SPHÆRICORUM

Lib. III.

PROP. I. THEOR.

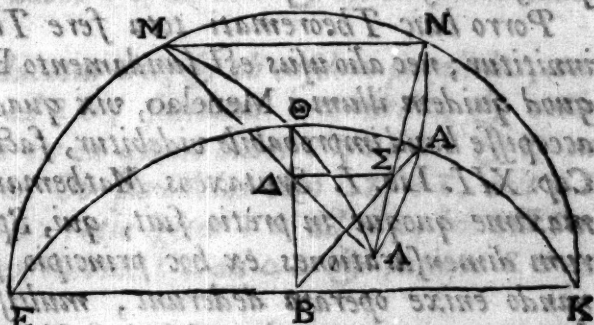
Sint in superficie Sphære duo arcus circulatorum magnorum, NME, NAA inter quos ducantur alii duo arcus EOA, AOM occurrentes invicem in puncto O: dico sinum arcus AN esse ad sinum arcus AA in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus NE ad sinum arcus EM, & ex ea quam habet sinus arcus MO ad sinum arcus OA.

Ponatur punctum B centrum esse Sphære, & jungantur rectæ AN, AM, MN, EB, & OB occurrens subtenſæ MA in Δ, & AB occurrens ipsi NA in Σ, & ducta ΔΣ producatur usque dum conveniat cum recta MN producta in K; & erit punctum K in plano utriusque



utrisque circuli $A \odot E$, NME . Sed puncta E , B sunt etiam in iisdem planis; quare KEB erit linea recta. Cum autem punctum Σ est in intersectione rectarum AB , NA , & punctum Δ in ipsarum $\odot B$, MA ; ac punctum K est in producta $\Sigma\Delta$; erunt tria puncta Σ , Δ , K in plano trianguli $N\Delta M$: erit igitur $N\Sigma$ ad ΣA in ratione composita ex ratione quam habet NK ad KM & ratione quam habet $M\Delta$ ad ΔA , per sequens Lemma I. Sed NK est ad KM sicut normalis cadens de puncto N super diametrum KEB ad normalem de puncto M super eandem, per Lemma II. Est autem normalis de puncto N sinus arcus EN , & normalis de puncto M est sinus arcus ME ; adeoque NK est ad KM ut sinus arcus NE ad sinum arcus ME . Eodem modo patebit $N\Sigma$ esse ad ΣA ut sinus arcus NA ad sinum arcus AA ; & $M\Delta$ esse ad ΔA ut sinus arcus $M\odot$ ad sinum arcus $\odot A$; quapropter sinus arcus AN est ad sinum arcus AA in ratione composita ex ratione sinus arcus NE ad sinum arcus ME , & ex ea quam habet sinus arcus $M\odot$ ad sinum arcus $\odot A$. Q. E. D.

Pone jam rectam $\Delta\Sigma$ parallelam esse ipsi MN ; & compleantur semicirculi EMN , $E\odot A$, occurrentes invicem ad K . Itaque quoniam in duobus planis ENK , $E\odot K$ duæ rectæ $\Sigma\Delta$, MN parallelæ sunt, erit quoque communis sectio horum planorum, nempe recta EBK , etiam ipsius $\Sigma\Delta$, MN parallelæ, ut ex 9^a XI. Eucl. constabit.



Cum autem normalis de puncto N ad diametrum KEB demissa sinus est arcus EN , cui ob parallelas æqualis est normalis de M ad eandem diametrum demissa, erit sinus arcus NE æqualis sinui ipsius EM . Ob parallelas vero MN , $\Delta\Sigma$, erit $N\Sigma$ ad ΣA , siue sinus arcus NA ad sinum arcus AA , sicut $M\Delta$ ad ΔA , hoc est, ut sinus arcus $M\odot$ ad sinum ipsius $\odot A$; componitur igitur ratio sinus arcus NA ad sinum arcus AA , ex ratione sinus $M\odot$ ad sinum ipsius $\odot A$ & ratione sinus arcus NE ad sinum arcus EM ; quæ quidem ratio, hoc in casu, ubi arcus EM , NE simul sumpti æquantur semicirculo, fit ratio æqualitatis.

L

Pari

Pari argumento demonstrabitur quicquid peti possit de rationibus sinuum horum arcuum, ope rectarum in dato plano inter se convenientium. At ex ipso diagrammate, quo in praesentiarum usi sumus, probari potest sinum arcus AA esse ad sinum arcus AN in ratione composita ex ratione sinus arcus AO ad sinum arcus OM , & ex ratione quam habet sinus arcus ME ad sinum arcus EN . Superius enim demonstratum est sinum arcus AN esse ad sinum arcus AA in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus MO ad sinum arcus OA & ex ea quam habet sinus arcus NE ad sinum arcus EM . Invertendo igitur, ratio sinus arcus AA ad sinum arcus AN composita erit ex ratione sinus arcus OA ad sinum arcus MO , & ex ratione sinus arcus ME ad sinum arcus EN . **Q. E. D.**

SCHOLIION. Vocem נכחון, qua significat Hebraeus Interpres subtensam dupli arcus, sive τὴν ὑπὸ τὴν διπλὴν τῆς περιφέρειας apud Ptolemaeum, ubique Sinum reddimas, nostri Levi Mathematicis morem gentes, & exempli usi Traductoris Arabis semper vocem $\sin$, hoc est Sinum, adhibentis. Rationes enim eadem sunt sinuum quae subtensarum duplorum arcuum inter se.

Porro huic Theoremati tota fere Trigonometria Veterum innititur; nec alio usus est fundamento Ptolemaeus in Syntaxi: quod quidem illum à Menelao, vix quadraginta annos seniore, accepisse haud improbabile videbitur, factà collatione huius cum Cap. XII. Lib. I. Syntaxeos Mathematicae. Idem Arabibus maxime quoque in pretio fuit, qui, Sphaericorum Triangulorum dimensionationes ex hoc principio petentes, eidem exornando enixe operam dederunt, multisque scriptis Regulam hanc, quam القطاع, hoc est Interfectionis, dixerunt, elucidare conati sunt. Unde Europaei Mathematici ante aliquot secula, cum re nomen etiam à Mauris mutuati sunt, ac de Figura Catha scripta reliquerunt; inter quos eminet Simon de Bredon Anglus, circa annum 1350 Mertonensis Socius, cujus de hac re opus in Bibliotheca Bodleiana non uno Volumine asservatur.

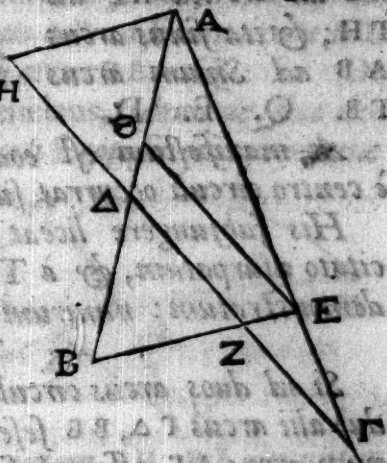
Lemmata autem in Codice Hebraeo absque demonstratione assumpta, in Arabico vero ad modum Ptolemaei demonstrata, sic se habent.

Lemma

Lemma I.

Si ad duas rectas AB, AG concurrentes in A ducantur duae aliae GA, BE sese interfecantes in puncto Z: dico rectam AE esse ad BG in ratione composita ex ratione AZ ad ZG & ratione BA ad BA.

Per A enim ipsi BE parallela ducatur AH, occurrens ipsi AG productae in H. Jam quoniam AH parallela est ipsi EZ, erit ut AE ad EG ita HZ ad ZG. Sumpta autem media recta ZA, ratio HZ ad ZG componetur ex ratione quam habet HZ ad ZA, & ex ea quam habet ZA ad ZG. Sed ob parallelas AH, BZ, erit & ZH ad ZA sicut BA ad BA: ratio igitur HZ ad ZG, hoc est AE ad EG, componitur ex ratione quam habet BA ad BA & ex ea quam habet AZ ad ZG.



Isdem positis; dico quoque GA esse ad AE in ratione composita ex ratione quam habet GA ad AZ & ex ea quam habet ZB ad BE.

Ipsi GA parallela ducatur EO, & ob easdem parallelas, erit ut GA ad AB ita GA ad EO; sumatur AZ media, & ratio GA ad EO componetur ex ea quam habet GA ad AZ & ex ea quam habet AZ ad EO. Ob parallelas vero AZ, OE, erit AZ ad EO sicut ZB ad BE: ratio igitur GA ad EO, hoc est GA ad AE, composita est ex ratione GA ad AZ & ratione ZB ad BE. Q. E. D.

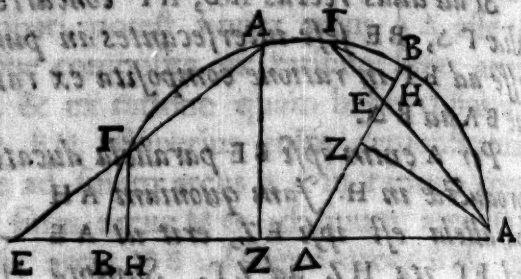
Lemma II.

Si in Circulo recta aliqua e centro educta arcum quemlibet ejusque subtensam dividerit: erunt segmenta subtense Sinubus segmentorum arcus proportionalia.

Sit enim circulus ABGA, in quo subtendat arcum aliquem recta AG, & de centro A ducatur utcumque recta AB occurrens subtense in B, arcui vero in B; & demittantur normales

ad ΔB rectæ ΛZ , ΓH : dico ΛZ esse ad ΓH , hoc est sinus
arcus ΛB ad sinum arcus ΓB , sicut ΛE ad $E \Gamma$.

Quoniam enim rectæ
 AZ, GH normales sunt
ad eandem ΔB , similia
erunt triangula AZL ,
 TEH ; atque adeo ut
 AB ad ET ita AZ ad
 TH ; Et ita sinus arcus
 AB ad Sinum arcus
 FB . Q. E. D.



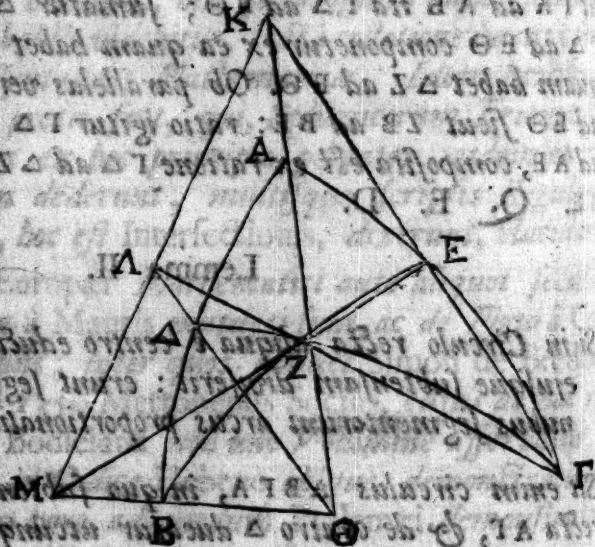
*Ac manifestum est eodem modo rem se habere, si recta
è centro circuli occurrat subtense extra circulum producta.*

His subungere liceat aliud Theorema, à Ptolemæo in loco citato usurpatum, & à Theone Alexandrino in Commentariis demonstratum: nimirum sequens

Theorema.

*Si ad duos arcus circularum magnorum AB, AΓ ducantur
duo alii arcus ΓΔ, BB sese intersecantes in puncto Z: dico si-
num arcus AΓ esse ad sinum arcus AE in ratione composita
ex ratione sinus arcus ΓΔ ad sinum arcus ΔZ, & ex ratione
sinus arcus BZ ad sinum arcus BE.*

Sit enim $\odot$ centrum Sphaerae, & jungantur rectae $\odot A, \Gamma B$ & producantur ad occursum in K ; itemque rectae $\odot B, Z E$ productae occurrant ad M , pariterque $\odot \Delta, \Gamma Z$ productae conveniant ad punctum Λ . Quoniam itaque tria puncta K, Λ, M , sunt in plano trianguli $\Gamma Z E$, quippe in productis ejus lateribus; eademque sunt etiam in plano circuli $\Delta \Gamma B$, utpote in rectis e centro ejus ductis, manifestum est ea includere in communem utriusque plani sectionem: ac proinde



ΛM erit linea recta. Ducta igitur recta ΛM , ad duas rectas ΓK , $K M$ ducuntur aliae duae $\Lambda \Gamma$, $M B$ occurrentes in puncto Z , adeoque (per Lemmatis I. part. poster.) ratio ΓK ad $K B$ componetur ex ratione $\Gamma \Lambda$ ad ΛZ & ratione $Z M$ ad $M B$. Sed (per Lemma II.) ΓK est ad $K B$ ut Sinus arcus $\Lambda \Gamma$ ad Sinum arcus ΛE ; & $\Gamma \Lambda$ est ad ΛZ ut Sinus arcus $\Delta \Gamma$ ad Sinum arcus ΔZ ; itemque $Z M$ est ad $M B$ ut Sinus arcus $B Z$ ad Sinum arcus $B E$. Composita est igitur ratio sinus arcus $\Lambda \Gamma$ ad Sinum arcus ΛE ex ratione sinus arcus $\Delta \Gamma$ ad Sinum arcus ΔZ & ratione sinus arcus $B Z$ ad Sinum arcus $B E$. Q. E. D.

Hoc autem Theorema omisit Menelaus, idemque sine demonstratione proposuit Ptolemæus, quasi Propositionis primariæ Corollarium, atque ex ea facile demonstrabile. Arcu-

bus enim $\Gamma \Lambda$, $\Gamma \Delta$ ad occursum in H productis, erunt arcus $\Gamma A H$, $\Gamma \Delta H$ semicirculi; ac proinde Sinus arcuum ΓA , ΛH ; $\Gamma \Delta$, ΔH erunt eadem rectæ. Ad arcus autem $E H$, $B E$ ducuntur duo arcus $A B$, $H Z$, concurrentes in puncto Δ ; atque adeo, per hanc primam Propositionem, erit Sinus arcus $H A$, hoc est Sinus arcus ΓA , ad Sinum arcus ΛE in ratione composita ex ratione Sinus arcus ΔH , hoc est Sinus arcus $\Delta \Gamma$, ad Sinum arcus ΔZ & ratione Sinus arcus $B Z$ ad Sinum arcus $B E$. Q. E. D.

Coroll. I. Quoniam autem sinus arcus $\Lambda \Delta$ ad Sinum arcus ΔB est in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus $\Lambda \Gamma$ ad Sinum ΓE , & ex ea quam habet sinus arcus $B Z$ ad Sinum $Z B$; hoc est, ut rectangulum sub sinibus $\Lambda \Gamma \times E Z$ ad rectangulum sub sinibus $\Gamma E \times B Z$; erit solidum sub extremis æquale solidum sub mediis. Proinde Solidum sub sinibus $\Lambda \Delta \times \Gamma B \times Z B$ æquale erit solidum sub sinibus $\Delta B \times \Lambda \Gamma \times E Z$. Hinc patet hos terminos in diversimodas variari posse Analogias. Ex. gr. sinus arcus ΓE ad Sinum arcus $B Z$ erit ut rectangulum sub sinibus $\Delta B \times \Lambda \Gamma$ ad rectangulum sub sinibus $\Lambda \Delta \times Z B$; hoc est, in ratione composita ex ea quam habet sinus ΔB ad Sinum $\Lambda \Delta$, & ex ratione sinus $\Lambda \Gamma$ ad Sinum $Z B$; vel si mavis, ex ratione sinus ΔB ad Sinum $Z B$ & ratione sinus $\Lambda \Gamma$ ad $\Lambda \Delta$. & sic de cæteris. Pari argumento, ex Theoremate nuper demonstrato,

monstrato, constabit solidum sub sinibus $\Gamma A \times \Delta Z \times BE$ equale esse solido sub sinibus $AE \times \Delta \Gamma \times BZ$; ac proinde sinum BZ esse ad sinum $Z\Delta$ in ratione composita ex ea quam habet sinus BE ad sinum $\Delta \Gamma$ & ex ea quam habet sinus ΓA ad sinum AE . &c.

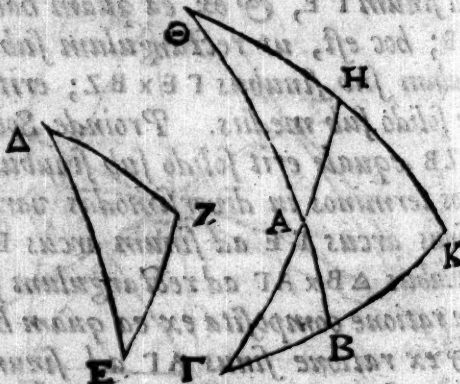
Coroll. 2. Quod si Γ polus fuerit arcus AB , & B polus arcus AE , erunt anguli A, E, Δ recti; & arcus omnes $AB, AE, BE, \Gamma A$ quadrantes; atque $\Gamma E Z, B \Delta Z$ erunt triangula Sphærica re-ctangula; quorum anguli $B \Gamma Z, Z B \Delta$ mensurantur arcibus $AE, A \Delta$ respective. Ex Corollario itaque precedente nullo fere negotio erui possunt Canones pro resolvendis Casibus Trigonometriae Sphæricæ pene omnibus, si demissis perpendicularibus triangula obliquangula ad casus re-ctangulorum reducantur.

PROP. II. THEOR.

Si duorum triangulorum Sphæricorum duo anguli fuerint æquales, duo vero alii anguli vel æquales inter se, vel simul sumpti duobus rectis æquales: dico quod Sinus laterum, quæ duobus angulis æqualibus subtenduntur, sunt ad sinus laterum quæ duobus aliis angulis, vel æqualibus vel duobus rectis æqualibus, subtenduntur respective, in eadem ratione; & è contra.

Sint duo triangula Sphærica $AB\Gamma, \Delta EZ$, sitque angulus A unius æqualis angulo Δ alterius; duo vero anguli Γ & Z vel sint æquales inter se, vel simul duobus rectis æquales: dico sinum arcus AB esse ad sinum arcus $B\Gamma$ sicut sinus arcus ΔE ad sinum arcus EZ .

Producatur arcus $A\Gamma$ ad H , & BA ad Θ , & fiat arcus AH æqualis arcui ΔZ , & angulus $AH\Theta$ angulo $EZ\Delta$; & compleatur figura, productis arcibus $\Gamma B, \Theta H$ ad occursum in K : erit igitur arcus $A\Theta$ æqualis arcui ΔE , uti ΘH arcui EZ . Quoniam vero anguli $B\Gamma A, AH\Theta$, vel sunt æquales, vel simul sumpti duobus rectis æquales, erunt arcus $\Gamma K, KH$ vel simul semicircu-



to æquales, vel æquales inter se; ac proinde Sinus arcus ΓK Sinui arcus KH æqualis. Sed, per Figuram Propositionis præcedentis, ratio sinus arcus ΓK ad sinum arcus $B\Gamma$ componitur ex ratione sinus arcus KH ad sinum arcus $H\Theta$ & ratione sinus arcus ΘA ad sinum arcus AB : deletis autem æqualibus sinibus arcuum ΓK , KH , erit sinus arcus $H\Theta$ ad sinum arcus $B\Gamma$ sicut sinus arcus $A\Theta$ ad sinum arcus AB , *ut innotat*. Verum arcus $H\Theta$ æqualis est arcui EZ , uti $A\Theta$ arcui ΔE ; erit igitur ut sinus arcus AB ad sinum arcus $B\Gamma$ ita sinus arcus ΔE ad sinum arcus EZ . *Q. E. D.*

Porro si ponamus angulos A , Δ esse æquales, ac sit ut sinus arcus AB ad sinum arcus $B\Gamma$ ita sinus arcus ΔE ad sinum arcus EZ : dico angulos Γ , Z vel æquales esse, vel simul sumptos duobus rectis æquales.

Fiant ea quæ prius facta sunt; ac sit ut sinus arcus ΓB ad sinum arcus AB , ita sinus arcus $H\Theta$ ad sinum arcus $A\Theta$; *ut innotat*: & collatis rationibus Figuræ Prop. I. congruis, consequetur, è converso superioris argumenti, sinum arcus KH æqualem esse sinui arcus $K\Gamma$; ac proinde angulum ΘHA æqualem esse angulo $A\Gamma B$, hoc est, angulum Z angulo Γ , vel simul sumptos duobus rectis esse æquales. *Q. E. D.*

Coroll. *In omni igitur Triangulo Sphærico sinus laterum sunt ut sinus angulorum ipsis oppositorum.*

PROP. III. THEOR.

Si duo triangula Sphærica duos habeant angulos ad utramque basin rectos, duos vero alios angulos ad bases æquales quidem sed non rectos: erunt sinus duorum laterum, angulum rectum in triangulorum altero continentium, inter se in ratione composita ex ratione quam habent sinus laterum in altero triangulo angulum rectum continentium, & eodem modo sumptorum, & ex ratione quam habet sinus arcus inter Verticem trianguli prioris & polum basis ejus intercepti, ad sinum arcus inter Verticem alterius trianguli & basis ejus polum intercepti.

Sint duo triangula Sphærica $AB\Gamma$, ΔEZ , quorum duo anguli A , Δ

Δ , Δ sunt recti; duo vero alij anguli ad Γ , Z æquales sine sed
 non recti, & sunt puncta H , Θ poli utriusque basis ΓA , $\Gamma \Delta$;
 dico sinum arcus AB esse ad sinum arcus AT in ratione compo-
 sita ex ratione sinus arcus BE ad sinum arcus ΔZ & ratio-
 nis arcus HB ad sinum arcus ΘE . *De A. O. arcus annu. 1000.*
 Fiat enim arcus HK æqualis arcui ΔZ , & per H polum ar-
 cus AT ducatur arcus HA *subtens arcus AT in A arcus annu. 1000.*
 occurrens arcui HB in A ; *subtens arcus HB in B arcus annu. 1000.*
 & erit arcus KA æqualis ar-
 cui ΔE , uti ΛH arcui ΘE . *Verum arcus HA in A arcus annu. 1000.*
 Quoniam vero figura AH -
 $\Lambda \Gamma$ est ad modum figurae
 Prop. I. hujus, erit sinus
 AB ad sinum BH in ratione
 composita ex ratione sinus
 arcus $\Lambda \Gamma$ ad sinum arcus
 ΓK , & ratione sinus arcus KA ad sinum arcus ΛH ; unde
 transpositis terminis, ratio sinus arcus AB ad sinum arcus AT
 composita erit ex ratione sinus arcus BH ad sinum arcus ΛH ,
 & ratione sinus arcus KA ad sinum arcus ΓK . Sed arcus TK
 æqualis est arcui $Z \Delta$, & arcus KA arcui ΔE , sicut & arcus ΛH
 arcui ΘE ; quapropter ratio sinus arcus AB ad sinum arcus AT
 componitur ex ratione sinus arcus ΔE ad sinum arcus $Z \Delta$ &
 ex ratione sinus arcus BH ad sinum arcus ΘE . Q. E. D.

Coroll. Hinc constat Tangentes perpendicularium $AB, \Delta E$,
sinibus Basium $\Delta T, \Delta Z$ proportionales esse.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula Spherica angulos habeant ad bases æ-
quales, quemque relativo suo, nec fuerit aliquis eorum
rectus; & ab angulis verticalibus in utroque demittan-
tur arcus ad bases normales: erunt sinus segmentorum
basium inter se proportionales.

Sint duo triangula $\triangle B\Gamma$, $\triangle EZ$; sitque angulus Γ unius α -
qualis angulo Δ alterius, atque etiam anguli ad puncta Γ , Z
æquales, neque sit ullus eorum rectus: & ducantur à punctis
verticibus B , E ad bases $\Lambda\Gamma$, ΔZ arcus perpendiculares BH , EO :
dico

dicō sinum arcus AH esse ad sinum arcus HT sicut sinus arcus $\Delta\Theta$ ad sinum arcus ΘZ .

Ponamus enim polos duorum arcuum AT , $Z\Delta$ esse ad puncta H , Θ . itaque quoniam anguli ad puncta H , Θ sunt recti, atque anguli ad puncta A , Δ sunt æquales, ac puncta K , Λ poli sunt arcuum AT , ΔZ : erit

(per præcedens) sinus

arcus AH ad sinum arcus

$\Delta\Theta$ in ratione compo-

sita ex ea quam habet

sinus arcus BH ad sinum

arcus $B\Theta$, & ratione si-

nus arcus BA ad sinum

arcus BK . Rursus, quo-

niam anguli apud H , Θ sunt recti, & anguli apud T , Z sunt æqua-

les & non recti; erit (per eandem) sinus arcus TH ad sinum ar-

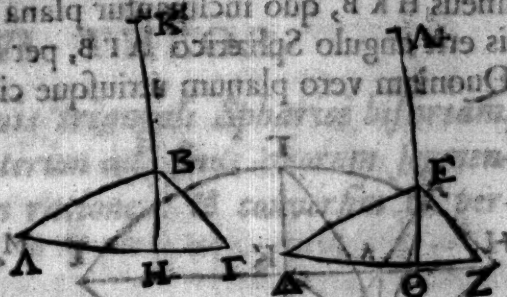
cus $Z\Theta$ in ratione composita ex iisdem rationibus, nempe ex ra-

tionem sinus arcus BH ad sinum arcus $B\Theta$, & ex ea quam habet

sinus arcus BT ad sinum arcus BK . Est igitur sinus arcus AH ad

sinum arcus $\Delta\Theta$ sicut sinus arcus TH ad sinum arcus $Z\Theta$;

& permutando erunt etiam proportionales. Q. E. D.



PROP. V. THEOR.

Si duo triangula Spherica habeant duos angulos ad utrius-

que basin æquales acutos, alios vero duos rectos; reli-

quis autem angulis subtendantur latera quadrante cir-

culi minoræ: erit sinus summæ duorum arcuum angulum

acutum comprehendentium in altero triangulorum, ad

sinum differentie eorundem arcuum, sicut sinus summæ

arcuum in altero angulum acutum continentium, ad si-

num differentie eorundem.

Sint duo triangula ABT , ΔEZ , quorum duo anguli ad puncta

A , Δ sint recti, duo vero alii ad T , Z æquales acuti; ac sit utrum-

que latus TA , $Z\Delta$ minus quadrante circuli: dico quod sinus ar-

cuum BT , TA simul sumptorum est ad sinum differentie ipso-

rum BT , TA , sicut sinus summæ arcuum EZ , $Z\Delta$, ad sinum dif-

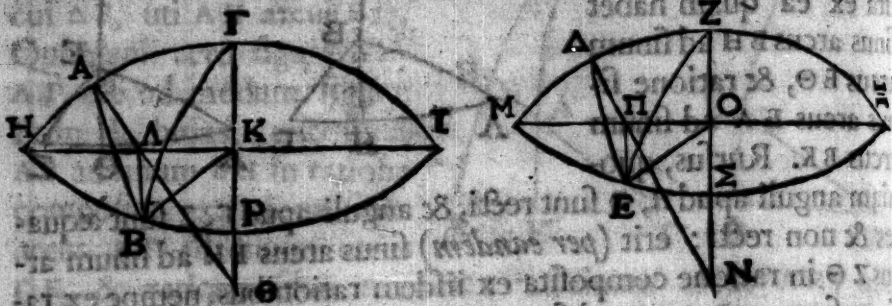
ferentie eorundem arcuum.

Centro T , intervallo TB describatur semicirculus HBI , ut

M

fiat

fiat ΔI summa arcuum $\Delta \Gamma$, ΓB ; & ΔH differentia eorundem. Sit Θ centrum Sphæraz, & ducantur $\Gamma \Theta$, ΘA , $H I$ communes sectiones planorum $\Gamma B \Theta$, $\Delta B \Theta$, $H B I$ cum plano circuli $\Gamma A H$. Cum autem Γ polus est circuli $H B I$, erit punctum K centrum ejus; ac juncta recta $B K$ æqualis erit ipsi $H K$, & utraque $B K$, $K H$ erit ad angulos rectos ipsi $\Gamma \Theta$; atque adeo angulus rectilineus $H K B$, quo inclinantur plana $\Delta \Gamma \Theta$, $B \Gamma \Theta$ inter se, æqualis erit angulo Sphærico $\Delta \Gamma B$, per ostensa in prima *Imi* hujus. Quoniam vero planum utriusque circuli $\Delta B \Theta$, $H B I$ ad angu-



los rectos insistit plano circuli $\Gamma A H$; erit recta $B A$, communis nempe dictorum planorum sectio, etiam normaliter erecta super utramque rectam $H A K$, $A \Lambda \Theta$ (*per 19^m XI. Eucl.*) ac proinde angulus $B A K$ rectus est. Radio itaque existente $B K$ sive $H K$, $B A$ sinus est arcus $H B$ sive anguli $H K B$, hoc est anguli Sphærici $\Delta \Gamma B$; ejusdemque sinus versus est $H \Lambda$, sinus versus vero complementi ejus ad semicirculum est recta ΔI . Sed (*per Lemma 2^m ad primam III. hujus*) ΔI est ad $H \Lambda$ ut sinus arcus ΔI ad sinum arcus ΔH ; hoc est, ut sinus versus anguli $I \Gamma B$ ad sinum versum anguli $\Delta \Gamma B$, ita sinus summæ arcuum $\Delta \Gamma$, ΓB ad sinum differentiæ eorundem. Completâ autem alterâ Figurâ, ut ΔZ sit summa arcuum ΔZ , $Z B$, & ΔM eorundem differentia, eodem argumento probabitur angulum $E \Pi O$ rectum esse, angulumque $\Pi O E$ æqualem angulo Sphærico $E Z \Delta$, atque adeo $M \Pi$ sinum esse versum anguli $E Z \Delta$, ΠZ vero sinum versum anguli $E Z Z$, radio existente $M O$ vel $O B$. Anguli autem $E Z \Delta$, $E Z Z$ sunt æquales angulis $\Delta \Gamma B$, $I \Gamma B$, ac propterea eorum sinus versi sunt proportionales; hoc est, ΠZ erit ad $M \Pi$ sicut $I \Lambda$ ad ΔH . Sed ut ΠZ ad $M \Pi$ ita sinus arcus ΔZ ad sinum arcus ΔM ; & ostensum est $I \Lambda$ esse ad ΔH sicut sinus arcus ΔI ad sinum arcus ΔH : sinus igitur summæ arcuum $B \Gamma$, ΓA est ad sinum differentiæ eorundem, sicut sinus summæ arcuum $E Z$, $Z \Delta$, sive arcus

arcus ΔE , ad sinum differentiae ipsorum $E Z$, $Z \Delta$, five arcus ΔM . Q. E. D.

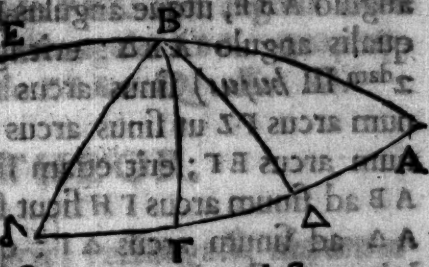
Coroll. *Plurimum manifestum est sinus summatarum harum arcuum esse ad sinus differentiarum eorundem, in duplicata ratione radii ad Tangentem dimidii anguli sub arcubus illis comprehensi.*

PROP. VI. THEOR.

Si dividatur angulus aliquis trianguli Sphaerici bifariam, erunt sinus duorum laterum ad sinus duorum segmentorum basis in eadem ratione: & conversim & permutatim.

Sit triangulum Sphaericum $AB\Gamma$, & secet arcus $B\Delta$ angulum $AB\Gamma$ bifariam; dico sinum arcus AB esse ad sinum arcus $A\Delta$ sicut sinus arcus $B\Gamma$ ad sinum arcus $\Delta\Gamma$.

In triangulis enim Sphaericis $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, duo anguli $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$ sunt aequales, duo vero anguli ad punctum Δ simul sumpti sunt aequales duobus rectis: erit igitur (per 2^m III. hujus) sinus arcus BA ad sinum arcus $A\Delta$ sicut sinus arcus $B\Gamma$ ad sinum arcus $\Gamma\Delta$, & *inversim* erunt etiam proportionales.



E converso vero, si sinus arcus AB fuerit ad sinum arcus $B\Gamma$ sicut sinus arcus $A\Delta$ ad sinum arcus $\Delta\Gamma$: dico arcum $B\Delta$ dividere angulum $AB\Gamma$ bifariam.

Quoniam enim duo anguli apud Δ sunt aequales duobus rectis, & sinus arcus AB est ad sinum arcus $A\Delta$ sicut sinus arcus $B\Gamma$ ad sinum arcus $\Gamma\Delta$: erunt, (e converso Prop. 2^a III. hujus) anguli $AB\Delta$, $\Delta B\Gamma$ vel aequales vel simul sumpti duobus rectis aequales; sed non sunt duobus rectis aequales, adeoque angulus $AB\Delta$ aequalis erit angulo $\Delta B\Gamma$. Q. E. D.

Rursus ponatur angulus $\Gamma B\delta$, qui deinceps est angulo $AB\Gamma$, bifariam dividi arcu $B\delta$: dico sinum arcus AB esse ad sinum arcus $B\Gamma$ sicut sinus arcus $A\delta$ ad sinum arcus $\delta\Gamma$: atque etiam *inversim*.

Quoniam enim duo triangula $AB\delta$, $\Gamma B\delta$ habeant angulum ad δ utrique communem, duos vero angulos $AB\delta$, $\Gamma B\delta$ simul

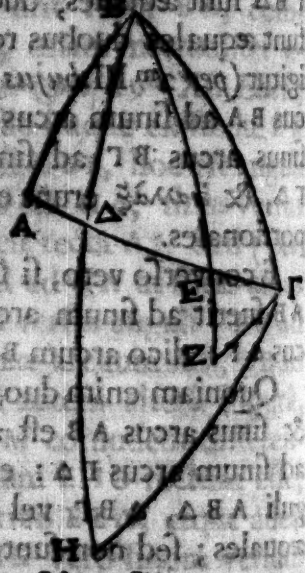
sumptos duobus rectis aequales, erit (per 3^m III huius) sinus ar-
cus AB ad sinum arcus AD sicut sinus arcus BT ad sinum arcus
TZ, & permutando. Conuersa autem huius manifesta est.

PROP. VII. THEOR.

Si de puncto verticali trianguli Sphærici ducantur ad basim
duo arcus, continentes cum duobus lateribus trianguli
angulos aequales: erunt rectangula sub sinibus segmen-
torum basi contenta inter se sicut quadrata sinuum late-
rum trianguli inter se.

Sit triangulum Sphæricum ABΓ, & à vertice B prodeant ad
basim AΓ arcus BΔ, BE, ita ut anguli ABA, ΓBE sint aequa-
les: dico fore quadratum ex sinu arcus AB ad quadratum ex si-
nu arcus BT sicut rectangulum sub sinibus arcuum EΔ, AΔ ad
rectangulum sub sinibus arcuum ΔΓ, ΓE.
De puncto Δ ad arcus BΔ, BE productos ducantur arcus ΓH,
FZ, ita ut angulus ΓHΔ sit equalis
angulo ABE, utque angulus ΓHΔ sit o-
qualis angulo ABA: erit igitur (per
2^{dam} III huius) sinus arcus AB ad si-
num arcus FZ ut sinus arcus AΔ ad si-
num arcus ET; erit etiam sinus arcus
AB ad sinum arcus ΓH sicut sinus arcus
AΔ ad sinum arcus ΔΓ: quadratum
igitur ex sinu arcus AB est ad rectan-
gulum sub sinibus arcuum FZ, ΓH sicut
rectangulum sub sinibus arcuum EΔ, AΔ
ad rectangulum sub sinibus ar-
cuum ET, ΓΔ. Quoniam vero angu-
lus BHT equalis est angulo ΓBE, ut-
que angulus BBT equalis angulo HBT,
erunt sinus arcuum aequalibus illis angulis subtensarum propor-
tionales, hoc est, sinus arcus BT erit ad sinum arcus TH ut sinus
arcus BE ad sinum arcus ET, ac proinde rectangulum sub sinu-
bus arcuum ΓH, FZ aequabitur quadrato ex sinu arcus BT. Qua-
dratum igitur ex sinu arcus AB erit ad quadratum ex sinu arcus
BT, sicut rectangulum contentum sub sinibus arcuum AΔ, EΔ
ad rectangulum sub sinibus arcuum ΔΓ, ΓE. Q. E. D.

Quod

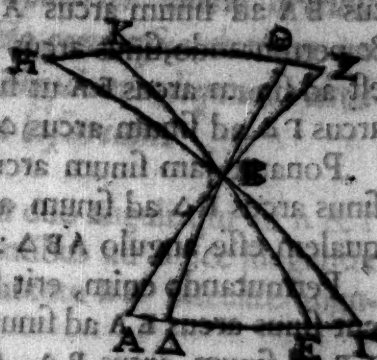


Quod si ponatur quadratum ex sinu arcus AB esse ad quatuordecim & sinu arcus BF sicut rectangulum sub sinibus arcuum AB , AD ad rectangulum sub sinibus arcuum AF , TE ; dico rectangulum ABD aequalem esse angulo EBE .

Producantur enim arcus AB , BF ad Z & H , ut sin arcus BZ equalis arcui AB , uti BH arcui BF ; producantur etiam arcus BA ad Θ , & fiat $Z\Theta$ equalis arcui AD ;

ducatur de puncto B arcus BK , qui contineat cum BH angulum aequalem angulo $Z\Theta$. Erit igitur, per iam demonstrata, quadratum ex sinu arcus BZ sive AB , ad quadratum ex sinu arcus BH , hoc est BF , sicut rectangulum sub sinibus arcuum BZ , $Z\Theta$ ad rectangulum sub sinibus arcuum BH , $H\Theta$.

Sed angulus $Z\Theta$, & $H\Theta$ arcibus BZ , BF sunt respective equales; unde manifestum est arcum BK aequalem esse arcui TE . Arcus autem BH equalis est arcui BT , uti angulus BKH angulo TEB ; angulus igitur KBH equalis est angulo TEB . Sed angulus KBH factus est equalis angulo ΘBZ , hoc est angulo ABA ; quapropter angulus ABA equalis est angulo TEB . Q. E. D.



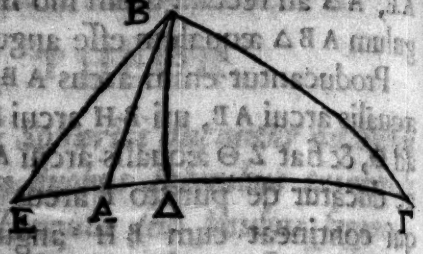
PROP. VIII. THEOR.

Si ab angulo recto trianguli Sphaerici rectanguli, ducantur ad basim duo arcus continentes cum altero laterum ejus angulos equales: erit sinus arcus compositi ex basi & arcu eidem adjuncto, ad sinum ipsius arcus adjuncti, ut sinus segmenti basis quod adjacet reliquo trianguli lateri, ad sinum alterius segmenti basis: & contra.

Sit ABC triangulum Sphaericum habens angulum B rectum, & de puncto B ducantur duo arcus ad basim, ut BA , BE , qui contineant cum arcu AC angulos equales. dico sinum arcus BAE esse ad sinum arcus AC sicut sinum arcus BA ad sinum arcus AE .

Quoniam enim angulus ABE est rectus, angulus vero ABC equalis angulo ABE , dividet arcus BE angulum qui deinceps est

est angulo EBA bifariam; quare (per 6^{am} III *hujus*) sinus arcus BE est ad sinum arcus BA ut sinus arcus EF ad sinum arcus FA , &c (per eandem) ut sinus arcus EA ad sinum arcus AA : sinus igitur arcus EF est ad sinum arcus FA sicut sinus arcus EA ad sinum arcus AA ; & permutando, sinus arcus FE est ad sinum arcus BA ut sinus arcus FA ad sinum arcus AA . Q. E. D.



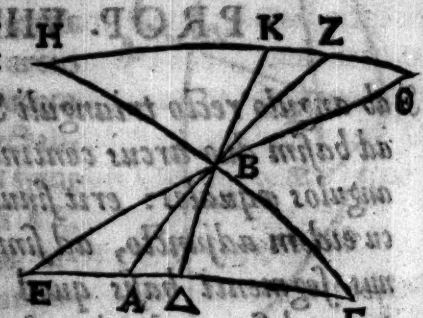
Ponatur jam sinus arcus FE esse ad sinum arcus BA sicut sinus arcus FA ad sinum arcus AA , & simul angulum EBA æqualem esse angulo ABA : dico angulum ABF rectum esse.

Permutando enim, erit sinus arcus FE ad sinum arcus FA sicut sinus arcus EA ad sinum arcus AA ; hoc est, ut sinus arcus EB ad sinum arcus BA . Arcus igitur BF dividet angulum qui deinceps est angulo EBA bifariam: unde consequetur angulum ABF rectum esse. Q. E. D.

Ponatur rursus sinus arcus FB esse ad sinum arcus BA sicut sinus arcus FA ad sinum arcus AA , angulo ABF existente recto: dico angulum EBA æqualem esse angulo ABA .

Producantur enim duo arcus AB , BF , ut fiat arcus BZ æqualis ipsi AB , & arcus BH ipsi BF ; & ducatur arcus HZ , ac sint duo arcus HZ , $ZΘ$ æquales

ipsis AG , AB respectivè: fiat etiam angulus KBZ æqualis angulo $ZBΘ$. Cumque angulus $H B Z$ est rectus (per superius ostensa) erit sinus arcus $ΘH$ ad sinum arcus $ΘZ$ sicut sinus arcus HK ad sinum arcus KZ . Sed



sinus arcus $ΘH$ est ad sinum arcus $ΘZ$ sicut sinus arcus FE ad sinum arcus BA ; quia hi arcus, uti diximus, sunt respectivè æquales. In eadem autem ratione sinus arcus FA est ad sinum arcus AA : quare sinus arcus HK est ad sinum arcus KZ sicut sinus arcus FA ad sinum arcus AA . Verum arcus ZH æqualis est arcui AG , quare arcus ZK æqualis est arcui AA ; & arcus BZ æqualis est arcui AB ; atque hi arcus continent angulos BZK , $B A Δ$ æquales: angulus igitur KBZ æqualis est angulo ABA , (per 4^m I. *hujus*.) Sed angulus KBZ

æqua-

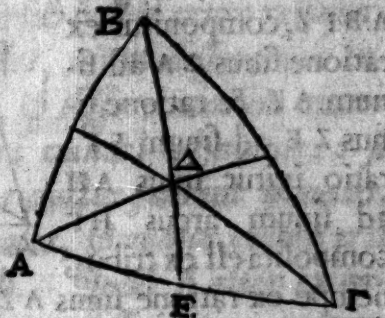
æqualis factus est angulo $Z B \Theta$, qui æqualis est angulo $A B E$:
 angulus igitur $A B \Delta$ æqualis est angulo $A B E$. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

*Si duo quilibet anguli trianguli Sphærici ductis arcibus
 dividantur bifariam, & e puncto concursus duorum ar-
 cuum ducatur arcus tertius ad angulum reliquum: divi-
 det ille arcus angulum reliquum bifariam.*

Trianguli Sphærici $A B \Gamma$ dividantur duo anguli qui ad A & Γ
 bifariam, ductis arcibus $A \Delta, \Delta \Gamma$ coeuntibus ad Δ ; & jungantur
 puncta B, Δ , ducto arcu $B \Delta$: dico arcum $B \Delta$ bisecare angu-
 lum $A B \Gamma$.

Producatur arcus $B \Delta$ ad E : &
 quoniam anguli qui sunt ad A & Γ
 dividuntur bifariam ab arcibus $A \Delta$,
 $\Delta \Gamma$, erit (per 6^m III hujus) sinus ar-
 cus $B \Delta$ ad sinum arcus ΔE sicut si-
 nus arcus $B \Gamma$ ad sinum arcus ΓE ,
 & sicut sinus arcus $A B$ ad sinum
 arcus $A E$: permutando itaque si-
 nus arcus $B \Gamma$ erit ad sinum arcus
 $A B$ sicut sinus arcus ΓE ad sinum arcus $A E$. Erit igitur e con-
 verso ejusdem 6^{te}) angulus $A B \Gamma$ bifariam divisus ab arcu $B \Delta$.
 Q. E. D.



Coroll. Omni igitur Triangulo Sphærico inscribi potest circulus.

PROP. X. THEOR.

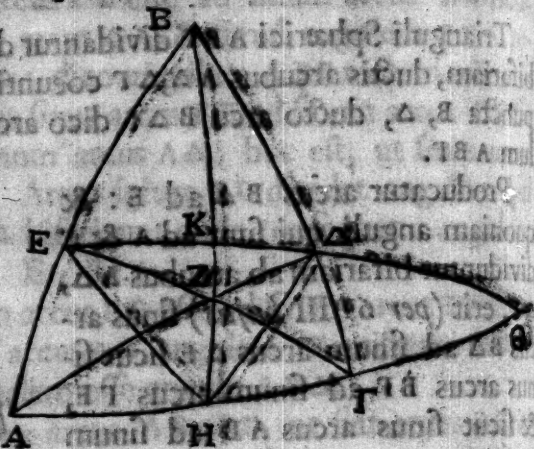
*Si demittantur, de duobus quibuscumque angulis trianguli Sphæ-
 rici, ad latera iisdem opposita, duo arcus perpendiculares:
 erit arcus ab angulo reliquo ad punctum quo conveniunt
 priores illi arcus, si producat, etiam normalis super
 latus reliquum.*

Sit $A B \Gamma$ triangulum Sphæricum, & de duobus punctis an-
 gularibus A & Γ ducantur ad latera opposita $B \Gamma$, $A B$ arcus nor-
 males $A \Delta$, ΓE , qui conveniant in puncto Z , & ducta $B Z$ pro-
 ducatur

ducatur ad circulum ipsius AT in puncto H : dico arcum HT perpendicularem esse super arcum AT .

Transeat enim per puncta Δ , E arcus $E\Delta$, qui producatufque dum occurrat arcui AT productio $..$ conveniant autem ad Θ , & jungantur duo arcus $H\Delta$, HE . Jam quoniam habetur figura $A\Theta E\Delta$, ad modum Propositionis primae hujus, erit sinus arcus $A\Theta$ ad sinum arcus ΘT ut ratio sine composita ex ratione sinus arcus $A\Delta$ ad sinum arcus ΔZ & ratione sinus arcus $Z\Theta$ ad sinum arcus ΘT . Pariterque in figura tali $ATBZ$, ratio sinus arcus AH ad sinum arcus HT composita est ex ratione sinus arcus AZ ad sinum arcus $Z\Delta$ & ratione sinus arcus ΔB ad sinum arcus BT .

Ratio autem sinus ΔB ad sinum BT , in figura $ABTZ$, componitur ex ratione sinus ΔA ad sinum AZ & ratione sinus ZB ad sinum BT : ratio igitur sinus AH ad sinum arcus HT composita est ex tribus, nempe ex ratione sinus AZ ad sinum $Z\Delta$, & ratione sinus ΔA ad sinum AZ , & ratione sinus ZB ad sinum BT : duae autem priores, ob utrumque inventum AZ , component rationem sinus ΔA ad sinum $Z\Delta$: ratio igitur sinus AH ad sinum HT componitur ex ratione sinus ΔA ad sinum $Z\Delta$ & ratione sinus ZB ad sinum BT . Sed ratio sinus $A\Theta$ ad sinum ΘT componitur ex iisdem rationibus; quare sinus arcus $A\Theta$ est ad sinum arcus ΘT sicut sinus arcus AH ad sinum arcus HT . Jam in triangulo $A\Delta T$ angulus $A\Delta T$ est rectus; quare (per octavam III hujus) angulus $\Theta\Delta T$ aequalis erit angulo $T\Delta H$, ac proinde angulus $A\Delta H$ aequalis erit angulo $A\Delta E$: ac ob angulum $T\Theta A$ rectum, erit quoque (per eandem octavam) angulus ΔET aequalis angulo $T\Theta H$. Quoniam vero $\Delta E H$ triangulum est Sphaericum, ac dividuntur anguli ejus ad Δ & E bifariam à ductis arcibus ΔZ , ZE ; si ducatur arcus HZ è puncto H ad concursus eorum in Z , erit quoque angulus $E H \Delta$ bifariam divinus; per nonam III hujus. In triangulis autem $\Theta\Delta H$, $\Theta E H$ anguli Δ & E divisi sunt bifariam ab arcibus ΔT , ET , quare (per

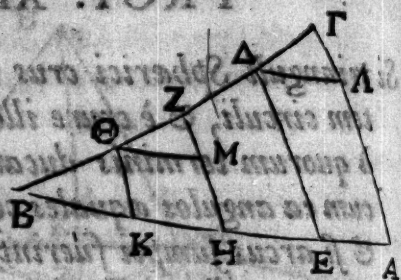


Si *III. hujus*) tam sinus arcus ΘE ad sinum EH , quam sinus
 arcus ΘA ad sinum arcus AH , erit in eadem ratione, nempe
 ut sinus arcus ΘF ad sinum arcus FH : permutando itaque si-
 nus ΘE erit ad sinum ΘA sicut sinus EH ad sinum HA , hoc est
 ut sinus arcus EH ad sinum arcus KA , quia angulus $EH\Delta$ bis-
 pater divisus est arcu HZK . Quocirca cum angulus EHK aqua-
 lis est angulo AHK , ac sinus arcus ΘE est ad sinum ΘA sicut si-
 nus EH ad sinum KA , erit (*& conversa* *8^{ta} III. hujus*) angulus
 ΘH rectus. *Q. E. D.*

PROP. XI. THEOR.

Si trianguli Sphaerici crus majus non excesserit quadran-
 tem circuli, & e crure illo majore sumantur duo arcus,
 à quorum terminis ducantur ad basim arcus continentes
 cum ea angulos aequales contento sub basi & crure reliquo;
 & si arcus sumpti fuerint aequales, erunt differentiae in-
 ter arcus illos ductos inaequales, & differentiarum minor
 erit ea quae est inter arcus cruri minori adjacentes; si
 vero differentiae ille inter arcus ductos fuerint aequales,
 tum arcus sumpti erunt inaequales, & major eorum erit
 qui propior est vertici trianguli. Quod si alter ex ar-
 cibus duobus sumptis, una cum differentia arcuum
 per terminos ejus ductorum, aequalis fuerit alteri arcui
 una cum differentia arcuum etiam per terminos ejus
 ductorum simul sumpta; tum duo arcus illi sumpti erunt
 inaequales, & eorum major erit qui propior vertici trian-
 guli. Si vero differentia inter alterum ex arcibus sumptis
 & excessum quo differunt duo arcus per terminos ejus
 ducti, aequalis fuerit differentiae inter alterum arcuum
 & excessum quo differunt arcus etiam per terminos ejus-
 dem ducti; erit arcus ille qui vertici trianguli adjacet
 minor altero. Ac universim erit ratio arcus illius, qui
 vertici trianguli propior sumitur, ad arcum reliquum
 remanens sumptum, major ratione quam habet diffe-
 rentia inter arcus per terminos prioris ductos ad diffe-
 rentiam quae est inter ductos per terminos alterius.

Sit triangulum Sphæricum $AB\Gamma$, cujus crus $B\Gamma$ majus sit reliquo ΓA , sed non majus quadrante circuli; & capiantur in $B\Gamma$ arcus $\Gamma \Delta$, $Z \Theta$, & ducantur per terminos eorum arcus ΔE , ZH , ΘK , continentes cum basi angulos æquales angulo A : dico quod si fuerit arcus $\Gamma \Delta$ æqualis arcui $Z \Theta$; erit ΓA differentia inter arcus ΓA , ΔE , minor quam ZM differentia ipsorum ZH , ΘK : Si vero differentia inter dictos arcus fuerint æquales; erit arcus $\Gamma \Delta$ major arcu $Z \Theta$. Ac si fuerit arcus $\Gamma \Delta$ una cum excessu quo ΓA superat ΔE æqualis arcui $Z \Theta$ una cum differentia ipsorum ZH , ΘK , erit etiam arcus $\Gamma \Delta$ major quam $Z \Theta$. Quod si differentia inter arcum $\Gamma \Delta$ & ΓA , quo scilicet ΓA superat ΔE , æqualis fuerit differentia inter $Z \Theta$ & ZM , quo ZH superat ΘK ; tum arcus $\Gamma \Delta$ minor erit arcu $Z \Theta$. Denique dico rationem arcus $\Gamma \Delta$ ad arcum $Z \Theta$ majorem esse ratione arcus ΓA ad arcum ZM .



Quoniam enim triangula $AB\Gamma$, ΔBE &c. angulum habent ad B communem, angulos vero ad puncta A , E , H , K æquales; erit finis arcus $B\Gamma$ ad sinum arcus $B\Delta$ sicut finis arcus ΓA ad sinum arcus ΔE , (*per 2^m III hujus.*) Et simili ratione, erit finis arcus $B\Delta$ ad sinum arcus BZ ut finis arcus ΔE ad sinum arcus ZH ; uti & finis arcus ZB ad sinum arcus $B\Theta$ sicut finis arcus ZH ad sinum arcus ΘK . Arcus autem $B\Gamma$ major est arcu ΓA , sed non major quarta circuli; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hac propositione dicta sunt, quorum demonstratio, ut & plurium his similium, è parte prima libri *Lemmatum Cyclicorum* petenda est.

His demonstrandis non inutile videbitur Lemma sequens, cum ejusdem Corollariis.

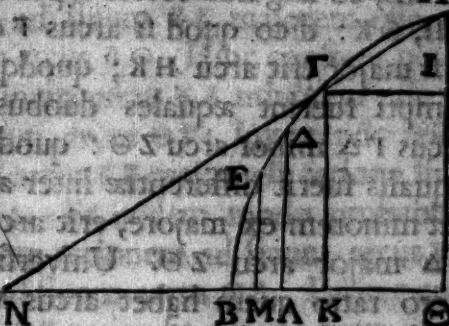
Lemma.

Ratio quam habet arcus major ad minorem major est ratione quam habet sinus majoris ad minoris sinum

Sint AB , $B\Gamma$ duo arcus, quorum sinus sint rectæ $A\Theta$, ΓK , normaliter ad diametrum $B\Theta$ applicatæ: dico arcum AB majorem habere rationem ad arcum $B\Gamma$ quam habet $A\Theta$ ad ΓK .

Ducatur

Ducatur recta $\Delta\Gamma$, quae producat^{ur} ad occursum diametri $\Gamma\Theta$ etiam producta ad punctum N , ac lenit AN ad NT sicut $\Delta\Theta$ ad ΓK , ac dividendo EN erit ad $\Delta\Gamma$ sicut ΓK ad $\Delta\Gamma$ sive ad differentiam ipsarum $\Delta\Theta, \Gamma K$. Sed NT major est arcu BT , utpote Tangente major, & subtensa $\Delta\Gamma$ minor est arcu $\Delta\Gamma$: ratio igitur arcus $\Delta\Gamma$ ad arcum ΓB major est ratione rectae ΓA ad rectam NT . Componendo itaque ratio arcus AB ad BT major erit ratione AN ad NT , hoc est ratione $\Delta\Theta$ ad ΓK . Q. E. D.



Coroll. 1. Permutando igitur, ratio arcus majoris ad sinum suum major est ratione arcus minoris ad sinum suum; atque adeo quo minor est arcus eo minor erit ratio ejus ad sinum eidem adjacentem.

Coroll. 2. Unde manifestum fiet, quod si sinus quatuor arcuum proportionales fuerint, sive si $\Delta\Theta$ sit ad ΓK sicut $\Delta\Gamma$ ad EM , major erit ratio arcus AB ad BT ratione arcus $B\Delta$ ad BE .

Coroll. 3. Manente autem dicta ratione sinuum, dividendo, ratio arcus $\Delta\Gamma$ ad arcum ΔB eo major erit quo majores sunt sinus $\Delta\Theta, \Gamma K$.

PROP. XII.

Si trianguli Sphaerici alter angulorum ad basin fuerit acutus, alter vero rectus; neque fuerit latus angulo recto subtensum majus quadrante circuli; & in hoc latere capiantur duo arcus, à quorum terminis ducantur arcus ad basin normales, atque hi arcus in latere sumpti fuerint aequales: erunt arcus, qui inter normales illos interceptiuntur, inaequales; eorumque major adjacebit angulo recto. Evenient autem in hoc casu cetera omnia quae in praecedentibus descripsimus.

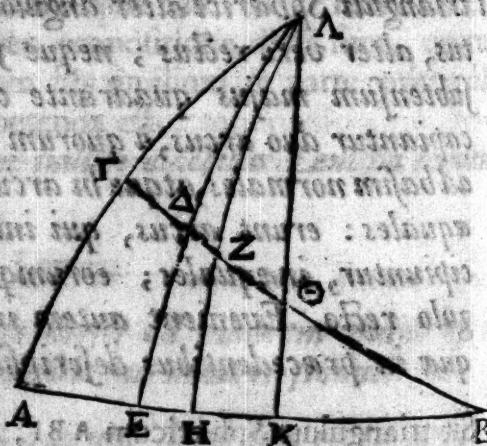
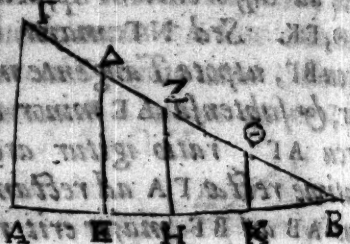
Sit triangulum Sphaericum $AB\Gamma$, cujus angulus B acutus, angulus vero A rectus; nec sit latus $B\Gamma$ majus quadrante circuli; & in latere $B\Gamma$ sumantur duo arcus $\Gamma\Delta, Z\Theta$, per quorum ter-

minos, ad angulos rectos super basim AB , ducantur arcus ΔE , ZH , ΘK : dico quod si arcus $\Gamma \Delta$, $Z\Theta$ fuerint aequales, arcus AB major erit arcu HK ; quodque si duo arcus AB , $\Gamma \Delta$ simul sumpti fuerint aequales duobus HK , $Z\Theta$ simul sumptis, erit arcus $\Gamma \Delta$ minor arcu $Z\Theta$: quod si differentia arcuum AB , $\Gamma \Delta$ aequalis fuerit differentiae inter arcus ΘZ , KH , auferendo scilicet minorem ex maiore, erit arcus $\Gamma \Delta$ major arcu $Z\Theta$. Universim vero ratio quam habet arcus AB ad HK major erit ratione $\Gamma \Delta$ ad $Z\Theta$.

Quoniam enim arcus BF minor est quadrante circuli, angulus autem qui ad B acutus est, qui vero ad A , E , H , K sunt recti; erit (per 3^{am} III. *hujus*) ut sinus summæ arcuum AB , BF ad sinum differentiae eorundem, ita sinus summæ arcuum ΔB , BE ad sinum differentiae arcuum ΔB , BE ; & ita sinus summæ arcuum ZB , BH ad sinum differentiae eorundem, ac denique ita sinus summæ arcuum ΘB , BK ad sinum differentiae ipsorum; quæ cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in præmissis dicta sunt.

Rursus si fuerit arcus BF quadrans circuli, adeoque AB ipsi BF æqualis, eadem ipsa etiam hoc in casu consequentur, juxta ea quæ demonstravimus in parte prima *Libri Lemmatum Cycliorum*.

Sed & eadem alio modo ex hoc tertio Libro probabuntur. Producantur enim arcus AF , EA , HZ , $K\Theta$ ad polemum arcus AB , qui sit ad punctum A ; & (per 3^{am} III. *hujus*) ratio sinus arcus AB ad sinum arcus BE , componetur ex ratione sinus arcus AF ad sinum arcus EA ; hoc est, ex ratione sinus arcus BF ad sinum arcus BA , & ratione sinus arcus AA ad sinum AF . Sed AA major est quam AF , & uterque minor quadrante circuli; quare ratio sinus AB ad sinum arcus BE major est ratione



ratione sinus arcus BF ad sinum arcus BA . Pari modo patebit rationem sinus arcus BB ad sinum BK maiorem esse ratione sinus arcus AB ad sinum arcus $B\Theta$. Hinc constare potest rationem sinus arcus BK ad sinum arcus KA minorem esse ratione sinus arcus AO ad sinum arcus OF : Invertendo igitur ratio sinus arcus KA ad sinum arcus KB major est ratione sinus arcus OF ad sinum arcus OA . Et eodem modo probabitur sinum arcus BK maiorem habere rationem ad sinum arcus KH quam habet sinus arcus AO ad sinum arcus OZ . Pariter cum ratio sinus HB ad sinum arcus BK major sit ratione sinus arcus ZB ad sinum ipsius $B\Theta$, erit ratio sinus arcus KA ad sinum arcus AH minor ratione sinus arcus OF ad sinum arcus FZ ; ac propterea sinus arcus AH ad sinum arcus AE erit in minore ratione quam sinus arcus FZ ad sinum arcus FA . Hæc autem cum ita se habeant, evenient ea omnia quæ in hac propositione dicta sunt, & arcus AE erit ad arcum HK in maiori ratione quam arcus FA ad arcum $Z\Theta$. Q. E. D.

S C H O L I O N.

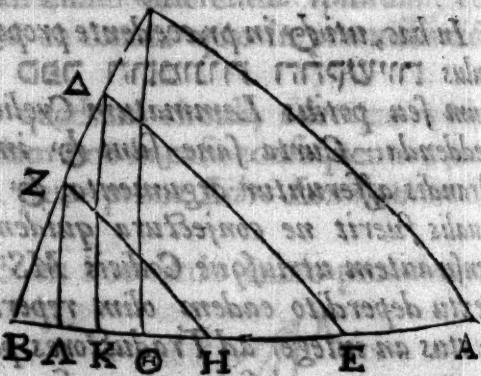
In hac, uti & in præcedente propositione, citatur Liber cui titulus ספר החמונות ההקשיות hoc est, Liber Propositionum seu potius Lemmatum Cyclicorum, uti verba videntur reddenda. Curta sane sunt & imperfecta quæ bis demonstrandis afferuntur argumenta, & ex dicto libro petita, quæ qualis fuerit ne conjectura quidem assequi licebit. Ex consensu autem utriusque Codicis MSⁱⁱ. in ipsius Auctoris Græco textu deperdito eadem olim reperta fuisse crediderim: qui textus an integer ad Traductores pervenerit, an potius hac in parte mancus, definire vix ausim. Sed nec te moveat si nonnulla hic desiderantur; quoniam in Corollaris ad xv^{am} hujus libri tertii, eadem ipsa paulo evidentius demonstrata reperies.

P R O P. XIII.

Si trianguli non æquilateri majus latus non excedat quadrantem circuli, & capiantur in latere minore duo arcus, à quorum extremitatibus ducantur arcus ad basim, continentes tum ea angulos æquales angulo quem latus reliquum cum eadem continet; ducantur etiam ab iisdem punctis alii arcus ad basim normales; tum si duo
arcus

arcus, intercepti inter illos qui æquales angulos cum basi constituunt, fuerint æquales, inæquales erunt arcus in basi inter normales intercepti; & eorum major adiacebit lateri trianguli minori. Quod si fuerint duo arcus à basi à normalibus abscissi æquales inter se, tum arcus, intercepti inter eos qui faciunt cum basi angulos æquales, erunt inæquales; & eorum major contemminus erit lateri majori; & evenient cætera accidentia, prout diximus, ad exemplum præcedentium.

Sit triangulum Sphæricum $AB\Gamma$, ac sit latus $A\Gamma$ majus quam ΓB , sed non majus quadrante circuli; ac capiantur in $B\Gamma$ arcus $\Gamma\Delta$, ΔZ , à quorum terminis ducantur ad basim AB arcus continentes cum ea angulos æquales angulo ad A iisdem relativo, sicut arcus ΔE , ZH ; uti etiam arcus $\Gamma\Theta$, ΔK , $Z\Lambda$ basi AB perpendiculares: dico quod si fuerit arcus ΔE æqualis arcui $E H$, erit arcus ΘK minor arcui $K\Lambda$; ac si fuerit arcus ΘK æqualis arcui $K\Lambda$ major erit arcus ΔE arcui $E H$; evenientque cætera modo dicta. Et universim ratio quam habet arcus ΔE ad $E H$ major erit ratione arcus ΘK ad $K\Lambda$.



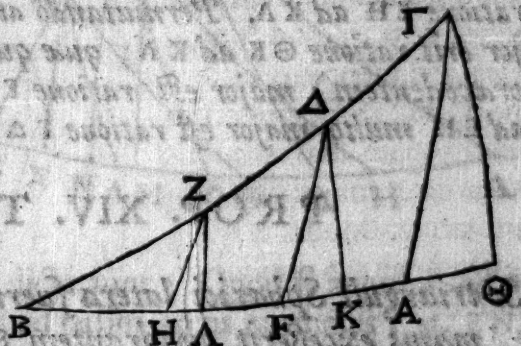
Quoniam in duobus triangulis Sphæricis $AB\Gamma$, $B\Lambda K\Theta H$, anguli apud puncta A , E sunt æquales; angulus autem apud B communis est utrique, & inter eos ducuntur arcus ad AB normales, ut $\Gamma\Theta$, ΔK ; erit (per 4^{am}. III. hujus) sinus arcus $A\Theta$ ad sinum arcus ΘB sicut sinus arcus $E K$ ad sinum ipsius $K B$; pariterque erit ut sinus arcus $E K$ ad sinum arcus $K B$ ita sinus arcus $H\Lambda$ ad sinum arcus $B\Lambda$; ac permutando sinus $A\Theta$ ad sinum $E K$ erit ut sinus ΘB ad sinum arcus $B K$; & ut sinus $E K$ ad sinum $H\Lambda$ ita sinus $K B$ ad sinum $B\Lambda$; & ubicunque duxeris normalem, hi sinus erunt semper proportionales. Arcus autem $A\Theta$ major est quam ΘB , ob arcum $A\Gamma$ majorem arcui ΓB . Jam si fuerit arcus ΘK æqualis arcui $K\Lambda$, erit differentia arcuum $A\Theta$, $E K$; hoc est, differentia arcuum

arcuum AE , ΘK major differentia arcuum EK , HA sive arcuum EH , ΛK , in figura prima: in figura autem secunda, summa arcuum AE , ΘK major erit summa ipsorum EH , ΛK . In utraque itaque figura arcus AE major est quam EH .



Quod si AE æqualis fuerit ipsi EH ; quoniam, in figura prima, arcuum AE , ΘK , sive arcuum AE , ΘK , differentia minor est differentia arcuum EK , HA ; hoc est, arcuum EH , ΛK ; & in figura secunda, summa arcuum AE , ΘK minor est summa arcuum EH , ΛK . In utraque igitur figura arcus $K\Theta$ minor erit quam ΛK . Atque universim ratio arcus AE ad EH major erit ratione quam habet arcus ΘK ad ΛK . Unde & ex præcedente constabit rationem arcus AE ad EH maiorem esse ratione arcus $\Gamma\Delta$ ad ΔZ . Q. E. D.

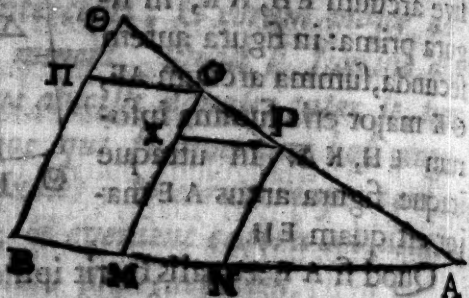
Pari modo ostendi potest quod, si angulus A trianguli $AB\Gamma$ fuerit obtusus, qui vero ad B acutus, & arcus $B\Gamma$ non excefferit quadrantem; ac capiantur in arcu $B\Gamma$ duo arcus ut $\Gamma\Delta$, ΔZ , & ducantur ad basim AB duo arcus ΔE , ZH , continentes cum ea angulos æquales angulo A iisdem relativo; ducantur etiam perpendiculares $\Gamma\Theta$, ΔK , $Z\Lambda$: tum eadem quoque evenient quæ modo diximus. Et universim ratio arcus AE ad EH major erit ratione arcus ΘK ad ΛK . Unde etiam constabit rationem AE ad EH maiorem esse ratione arcus $\Gamma\Delta$ ad ΔZ . Q. E. D.



SCHOLION.

Ut autem hæc melius intelligantur, Scholium hoc subungere visum est. Quoniam sinus arcus $A\Theta$ est ad sinum arcus ΘB sicut sinus arcus EK ad sinum arcus KB , &c. contineant arcus $A\Theta$, ΘB angulum aliquem $A\Theta B$, & in $A\Theta$ capiantur arcus,

arcus, AO ipsi EK æqualis, uti & AP ipsi HA; & ducantur
 arcus OM, PN, constituentes cum basi AB angulos M & N an-
 gulo B æquales; & fiat PB
 ipsi OM, & ME ipsi PN
 æqualis: erit igitur (per
 2^m. III. hujus) arcus OM
 æqualis arcui KB in præ-
 cedentibus figuris, & PN
 arcui BA. Proinde arcus
 OO æqualis erit differen-
 tiæ arcuum AE, EK, in priore figura; vel summæ ipsorum
 AE, EK, in secunda: & arcus OP æqualis erit differentiæ
 vel summæ arcuum BH, KA. Erit etiam arcus OP æqualis
 arcui EK, & OZ ipsi KA. Jam, per undecimam præcedentem,
 ratio arcus OO ad OP major est ratione OP ad EO; hoc est,
 ratio differentiæ vel summæ arcuum AE, EK ad arcum EK
 major est ratione differentiæ vel summæ arcuum BH, KA ad
 arcum KA: componendo igitur, in casu prioris figuræ; vel
 dividendo, in casu figuræ secundæ, ratio AE ad EK major erit
 ratione EH ad KA. Permutando autem ratio AE ad EH ma-
 jor erit ratione EK ad KA; quæ quidem ratio (per proximè
 præcedentem) major est ratione GA ad AZ; ratio igitur AE
 ad EH multo major est ratione GA ad AZ. Q. E. D.



PROP. XIV. THEOR.

Si trianguli Sphærici latera fuerint inæqualia, nec eorum
 majus exceſſerit quadrantem, & à vertice ejus ad basim
 ducatur arcus utcunque, modo non minor sit latere tri-
 anguli minore; sumptisque in latere minore arcubus, du-
 cantur per terminos eorum ad basim arcus continentes
 cum ea angulos æquales angulo quem cum ipsa continet
 latus trianguli majus; ducantur etiam per eosdem ter-
 minos arcus alii, continentes cum basi angulos æquales
 angulo, quem cum ea continent arcus prius ductus; &
 erunt eadem quæ in præcedentibus propositionibus
 dicta sunt: Et uniuersum ratio arcuum interceptorum ab
 iis qui cum basi continent arcus æquales contento sub
 basi

basin & latere majore, ubicunque sumantur, major erit
ratione arcuum interceptorum ab aliis illis arcubus
ductis: posito scilicet quod in omnibus his rationibus
antecedentes sint arcus illi qui adjacent lateri majori,
consequentes vero qui ab eodem remotiores sunt.

Sit $\triangle A\Gamma B$ triangulum Sphaericum, cujus latus $A\Gamma$ majus sit
latere $B\Gamma$, sed non majus quadrante circuli, & à vertice Γ
ducatur ad basin AB arcus quilibet $\Gamma\Delta$, qui non minor sit quam
 $B\Gamma$; & in $B\Gamma$ capiantur duo arcus ΓE , $E Z$, & ducantur per
eorum extremitates ad basin arcus $E H$, $Z\Theta$, continentes cum
ea angulos æquales angulo A ; ducantur etiam alii arcus $E K$,
 $Z\Lambda$ facientes cum eadem basi angulos æquales angulo ad Δ :
dico rationem arcus $A H$ ad arcum $H\Theta$ majorem esse ratione
arcus ΔK ad $K\Lambda$.

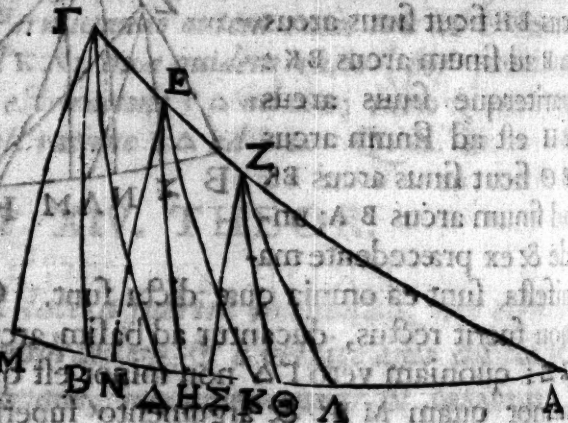
Nam si fuerit angu-
lus $A\Gamma B$ rectus, erit,
per quartam hujus, sinus
arcus AB ad sinum arcus
 BH sicut sinus arcus
 ΔB ad sinum arcus BK :
pariterque sinus arcus
 BH est ad sinum arcus
 $B\Theta$ sicut sinus arcus BK
ad sinum arcus BA ; unde
& ex præcedente ma-
nifesta sunt ea omnia quæ dicta sunt. Quod si angulus ad B
non fuerit rectus, ducantur ad basin arcus normales ΓM , $E N$,
 $Z Z$: quoniam vero $\Gamma\Delta$ non minor est quam ΓB , erit ΔM non
minor quam MB ; & argumento superius usurpato, probabi-
tur sinum arcus AM esse ad sinum arcus MB , sicut sinus arcus
 HN ad sinum arcus NB , & ita sinus arcus ΘZ ad sinum ZB ;
erit etiam sinus arcus ΔM ad sinum arcus MB sicut sinus ar-
cus KN ad sinum arcus NB , & sicut sinus arcus ΛZ ad sinum
arcus ZB . Sed arcus AM major est quam BM , & arcus ΔM
non minor est quam BM , & nec arcus AM neque $A\Gamma$ major
est quadrante circuli: erit igitur ratio arcus AH sive diffe-
rentia arcuum AB , BH , ad $H\Theta$ sive differentiam arcuum BH ,
 $B\Theta$, major ratione quam habet ΔK differentia arcuum ΔB , BK ,
ad arcum $K\Lambda$ differentiam arcuum $K B$, BA . Pariterque etiam
constabit



constabit arcum $\Delta\Delta$ majorem habere rationem ad arcum ΔB quam habet arcus HK ad KB , atque hanc rationem majorem esse ea quam habet $\Theta\Delta$ ad ΔB .

Est enim finis arcus ΔM ad finem arcus HN sicut finis arcus $M\Delta$ ad finem arcus HN , & finis arcus HN ad finem ΘZ sicut finis HN ad finem ΔE , quia sine inter se sicut finis arcus MB ad finem BN , & ut finis BN ad finem BZ ; ac proinde, argumento Scholii precedentis, erit differentia arcuum ΔM HN ad differentiam arcuum HN ΘZ in maiori ratione quam differentia arcuum ΔM KN ad differentiam arcuum KN ΔZ : hoc est, differentia arcuum ΔH MN ad differentiam arcuum $H\Theta$ NZ in maiori erit ratione quam differentia arcuum ΔK MN ad differentiam arcuum $K\Delta$ NZ . Unde & ex precedentibus consequitur rationem arcus ΔH ad arcum $H\Theta$ majorem esse ratione arcus ΔK ad arcum $K\Delta$.

Rursus, si fuerit angulus A trianguli $AB\Gamma$ acutus, qui vero ad B obtusus, ac latus $A\Gamma$ non sit majus quadrante circuli; ac ducatur de puncto Γ ad basin AB arcus $\Gamma\Delta$, & capiantur in latere $A\Gamma$ arcus ΓE , $E Z$, & ducantur arcus EH , $Z\Theta$ continentes cum basi AB angulos æquales angulo ad B ; ducantur quoque alii arcus $E K$, $Z\Lambda$ continentes cum basi angulos æquales angulo Δ : dico rationem arcus ΔK ad $K\Delta$ majorem esse ratione arcus BH ad $H\Theta$.



Demittantur enim arcus ad basin perpendiculares ΓM , $E N$, $Z S$: & (per 4^{am} III. hujus) erit ut finis arcus ΔM ad finem arcus MB , ita finis arcus ΔN ad finem arcus NH , & finis arcus ΔS ad finem arcus $S\Theta$; pariterque erit ut finis arcus ΔM ad finem arcus $M\Delta$, ita finis arcus ΔN ad finem arcus NK ; & ita finis arcus ΔS ad finem arcus $S\Lambda$: erit igitur ratio differentiarum arcuum $\Delta\Delta$ ΔK ad differentiam arcuum $K\Delta$ ΔA major ratione quam habet differentia arcuum $B\Delta$ ΔH ad differentiam arcuum $H\Delta$ $\Delta\Theta$. Q. E. D.

Unde etiam consequitur rationem arcus $\Delta\Delta$ ad ΔB majorem esse

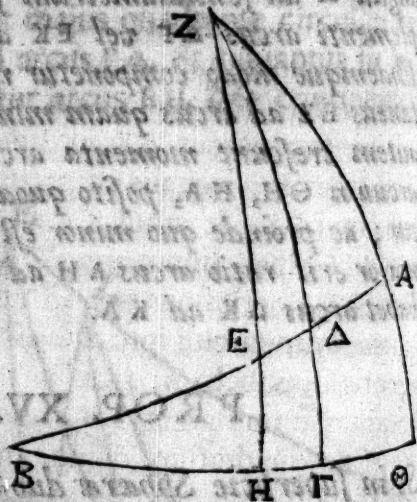
esse rationem arcus AH ad KH , atque rationem AK ad KH majorem esse ratione AA ad $A\Theta$. *Plurima autem ad perfectam demonstrationem in his desiderari quis non videt, sive ab Autore subintellecta, sive à Traductoribus brevitati studentibus prætermissa, vel forsitan remotorum seculorum injuria in libris antiquioribus oblitterata? Sed & ex diversissimo fundamento, quod in Scholio ad I. X. II. secundi Libri posuimus, eadem ipsa patulo ut videtur aptius derivari possunt. Ostendimus enim ibidem, pag. 701. rationem arcus momentanei $ΓB$ ad momentaneum AH (in fig. prima) componi ex data & manente ratione sinus anguli A ad semidiametrum Sphaeræ, & ex ratione sinus complementi arcus AT vel BH ad quadrantem, ad sinum anguli ATB vel BH . Simulque rationem momentanei arcus $ΓE$ ad momentaneum arcum $ΔK$ componi ex ratione data quam habet sinus anguli $Δ$ ad semidiametrum Sphaeræ, & ratione sinus complementi arcus $ΔΓ$ vel EK ad sinum anguli $ΔΓB$ vel KEB . Eodemque modo componetur ratio quam habet arcus momentaneus EZ ad arcum quam minimos $H\Theta$ ac KA . Equabiles autem crescunt momenta arcuum $ΔK$, $KΔ$, quam momenta arcuum ΘH , HA , posito quod arcus BT motu æquabili augēatur; ac proinde quo minor est angulus A respectu anguli $Δ$, eo major erit ratio arcus AH ad arcum $H\Theta$, respectu ejus quam habet arcus $ΔK$ ad KA .*

PROP. XV. THEOR.

Si in superficie Sphaeræ duo circuli magni inclinati sint ad invicem, & capiantur in eorum uno duo puncta, per quæ ducantur ad alterum duo arcus eidem ad angulos rectos: tum sinus arcus, intercepti inter casus duorum perpendicularium, erit ad sinum arcus inter sumpta duo puncta, ut rectangulum contentum sub semidiametro Sphaeræ & semidiametro circuli qui contingit unum e circulis & alteri æquidistans est, ad rectangulum sub semidiametris duorum circulorum per sumpta duo puncta transeuntium, alterique dictorum circulorum magno- rum æquidistantium.

Sint duo circuli magni AB , BF inclinati inter se, & sumantur in AB duo puncta Δ , E , per quæ ducantur ad arcum BF normales $\Delta\Gamma$, BH : dico quod sinus arcus ΓH est ad sinum arcus $E\Delta$, sicut rectangulum sub semidiametro sphaeræ & semidiametro circuli ipsi BF æquidistantis circumloque BA contingentis, ad rectangulum sub semidiametris circuloꝝ per puncta Δ , E transeuntium circuloque BF æquidistantium.

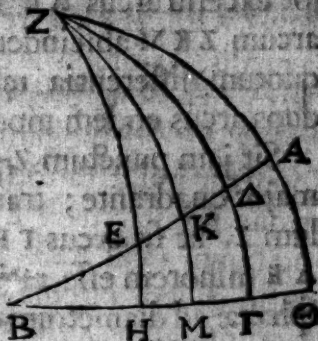
Producantur arcus $\Gamma\Delta$, HE ad polum circuli BF , qui sit Z ; & ad BA normalis sit arcus AZ . Jam quoniam uterque angulus $ZA E$, ZHB est rectus, & angulus $A E Z$ est angulo $B E H$ æqualis, erit sinus arcus $A Z$ ad sinum arcus $Z E$ (per 2^m III. *hujus*) sicut sinus arcus BH ad sinum arcus $B E$. Est autem Figura $B T Z E$ ad modum figuræ propositionis primæ hujus; componetur igitur ratio sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔE ex ratione sinus arcus $F Z$ ad sinum $Z\Delta$, & ratione sinus arcus BH ad sinum arcus $B E$. Verum hæc ratio eadem ostensa est ac ratio sinus arcus $A Z$ ad sinum arcus $Z E$; quare sinus arcus ΓH est ad sinum arcus ΔE ut rectangulum sub sinibus arcuum ΓZ , $A Z$ ad rectangulum sub sinibus arcuum ΔZ , $Z E$. Sinus autem arcus ΓZ semidiameter est sphaeræ, & sinus arcus $A Z$ semidiameter est circuli transeuntis per A & circulo BF æquidistantis, qui etiam contingit circumloque AB in puncto A ; & sinus arcuum ΔZ , $Z E$ sunt semidiametri circuloꝝ per puncta Δ , E transeuntium, eidemque circulo BF æquidistantium. Constat ergo propositum.



Hinc demonstrari potest, uti diximus, Propositio principalis libri tertii Sphaericorum *Theodosii*, diverso tamen modo. Ostendit enim ille rationem arcus $\Gamma\Theta$ ad arcum $A\Delta$ minorem esse ratione diametri Sphaeræ ad diametrum circuli æquidistantis ipsi $BF\Theta$, & circumloque AB in puncto A contingentis. Hæc autem propositio est ipsius *Apollonii*, in libro cui titulus *Liber 7^{us}*, (forte *De Principiis universalibus*.) Nos vero in sequentibus ostendemus quomodo se res habeat universim, quod-

que ratio arcus ΓH ad arcum ΔE certa quadam ratione maior est, quadam vero minor.

Jam si duo circuli magni AB , $B\Theta$ inclinentur ad invicem, & ducatur circulus transiens per polos utriusque, ut $ZA\Theta$, & punctum Z sit polus circuli $B\Theta$; ducatur etiam e puncto Z arcus circuli magni $ZK M$ occurrens arcui AB in K , ita ut sinus arcus ZK media proportionalis sit inter sinus arcuum ZA , $Z\Theta$; hoc est, ut diameter circuli per K transeuntis circuloque $B\Theta$ æquidistantis, media proportionalis sit inter diametrum Sphære & diametrum circuli contingentis circumulum AB circuloque $B\Theta$ æquidistantis: dico excessum quo arcus BK superat arcum BM datum esse; excessumque illum majorem esse quovis alio inter quoslibet duos arcus ad hunc modum abscissos.



Est enim sinus arcus MZ ad sinum arcus ZK sicut sinus arcus ZK ad sinum arcus AZ , ac proinde sinus arcus $M\Theta$ est ad sinum arcus AK ut sinus arcus KB ad sinum arcus BM . Sed arcus $B\Theta$ æqualis est arcui AB ; quare arcus ΘM æqualis est arcui BK , & arcus KA arcui BM . Quoniam vero sinus arcus MZ est ad sinum arcus ZK sicut sinus arcus ZK ad sinum arcus ZA , erit sinus MZ ad sinum ZA , five diameter sphære ad diametrum circuli ipsi $B\Theta$ æquidistantis & circumulum AB tangentis in puncto A , sicut quadratum è sinu arcus ZM ad quadratum è sinu arcus ZK , hoc est, ut quadratum è sinu arcus ΘM ad quadratum è sinu arcus AK . Componendo igitur ac dividendo, erit ut summa dictarum diametrorum ad earundem differentiam ita summa quadratorum ex sinibus arcuum ΘM , KA qui quadrantem conficiunt, hoc est, quadratum ex semidiametro sphære, ad differentiam quadratorum ex iisdem sinibus. Sed dictæ diametri datæ sunt, data est igitur differentia illa quadratorum; & dato eorundem aggregato, dantur quoque ipsa quadrata è sinibus arcuum ΘM , AK : dantur ideo ipsi arcus, ac proinde eorundem differentia data est. Quum autem hi duo arcus simul sumpti quadrantem circuli conficiunt; dico eorundem differentiam majorem esse quavis alia differentia arcuum ad hunc modum abscissorum.

Ducantur enim per polum Z arcus circulorum magnorum $Z\Delta\Gamma$,

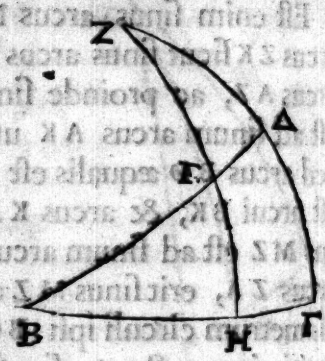
$\Gamma \Delta \Gamma$, $Z K M$, $Z A H$, & erit sinus arcus ΓM ad sinum arcus $K A$ ut rectangulum sub semidiametro sphaerae & sinu arcus $A Z$ contentum, ad rectangulum sub sinibus arcuum ΔZ , $Z K$. Sed rectangulum sub semidiametro sphaerae & sinu arcus $A Z$ aequale est quadrato ex sinu arcus $K Z$; quod quidem quadratum majus est rectangulo sub sinibus ΔZ , $Z K$; quare arcus ΓM major est arcu ΔK . Pari modo demonstrabitur arcum $M H$ minorem esse arcu $K E$. Quae cum ita se habeant, erit excessus arcus $B K$ supra arcum $M B$ major excessu arcus $B B$ supra arcum $B H$, ac major excessu arcus ΔB supra arcum $B \Gamma$. Unde manifestum est arcum $Z K M$ abscindere à duobus circulis $A B$, $B \Theta$ duos arcus, quorum differentia major sit ea quae est inter quoslibet alios duos arcus eodem modo abscissos.

Sit jam punctum Z polus circuli $B H \Gamma$, at sit arcus $B \Delta$ non major quadrante; transeant autem arcus $\Gamma \Delta Z$, $H B Z$ per polum Z , ut sit arcus ΓH major arcu ΔE : dico rationem ΓH ad ΔE minorem esse ratione diametri sphaerae ad diametrum circuli circulo $B \Gamma$ aequidistantis & per punctum Δ transeuntis.

Quoniam enim arcus ΔB non est major quadrante, & arcus ΔB minor est quam ΓH ; ratio autem sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔB (per jam ostensum) composita est è B ratione sinus arcus ΓZ ad sinum arcus $Z \Delta$, & ratione sinus arcus $H B$ ad sinum arcus $B E$; & $H B$ minor est quam $B E$: erit igitur ratio sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔB minor ratione sinus arcus ΓZ ad sinum arcus $Z \Delta$, siue ratione quam habet semidiameter sphaerae ad semidiametrum circuli per Δ transeuntis circuloque $B \Gamma$ aequidistantis. Cum autem ΓZ quadrans est, & ΓH quadrante minor, erit quoque ratio arcus ΓH ad ΔB dicta ratione diametrorum minor.

Cum vero sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔB sit sicut rectangulum sub semidiametro sphaerae & semidiametro circuli qui contingit circulum $B E \Delta$, ipsiusque $B \Gamma$ plano aequidistat, ad rectangulum sub semidiametris circulorum per puncta Δ , B transeuntium, eidemque plano aequidistantium; si arcus ΓH major sit quam ΔE : dico rationem quam habet arcus ΓH ad arcum ΔB maiorem esse dicta ratione rectangulorum.

Quoniam



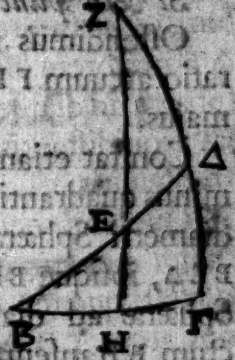
Quoniam enim arcus ΓH maior est arcu ΔE , erit eorundem arcuum ratio major ratione sinus arcus ΓH ad sinum arcus ΔE . Hec autem ratio ea est quam habet rectangulum sub semidiametro sphaerae & semidiametro circuli qui tangit circulum $B A$ circuloque $B \Gamma$ æquidistat, ad rectangulum sub semidiametris circulorum eidem $B \Gamma$ æquidistantium perque puncta Δ, E transeuntium: ratio igitur arcus ΓH ad arcum ΔE maior est ratione predicta.

Eodem modo constabit, quod si arcus ΓH minor fuerit quam ΔE , erunt hi arcus in ratione minore quam habent rectangula illa inter se.

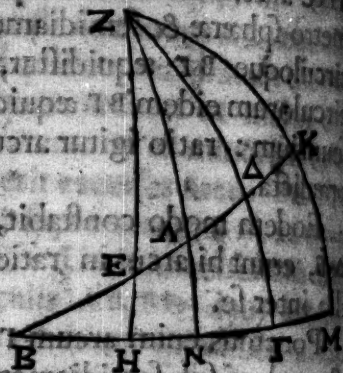
Ponamus enim arcum ΓH minorem esse arcu ΔE , & erit rectangulum sub semidiametro sphaerae & semidiametro circuli contingentis circulum $B A$ ipsique $B \Gamma$ æquidistantis minus rectangulo sub semidiametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium eidemque plano æquidistantium: horum autem rectangulorum rationem habent sinus arcuum $\Gamma H, \Delta E$ inter se: minor itaque est ratio arcuum ipsorum ratione dictorum rectangulorum.

Sit autem arcus ΓH minor arcu ΔE , live rectangulum sub diametro sphaerae & diametro circuli contingentis circulum $B A$, planoque circuli $B \Gamma$ æquidistantis, minus rectangulo sub diametris circulorum per puncta Δ, E transeuntium: dico rationem arcus ΓH ad arcum ΔE maiorem esse ratione diametri circuli qui contingit circulum $B A$, ad diametrum circuli per punctum E transeuntis.

Quoniam enim rectangulum sub sinibus arcuum $E Z, Z A$ majus est rectangulo sub semidiametro sphaerae & semidiametro circuli contingentis $B A$ ipsique $B \Gamma$ æquidistantis: ducantur per Z polum circuli $B \Gamma$ arcus circulorum maiorum $Z E M, Z A N$, ita ut rectangula sub sinibus arcuum $\Delta Z, Z A$; $E Z, Z K$ contenta, sint singula æqualia contento sub semidiametro sphaerae & semidiametro circuli contingentis circulum $B A$. Cadat autem imprimis punctum Λ inter puncta Δ, E . Et ob æqualia illa rectangula, erit (per iam ostensa) arcus ΓN æqualis arcui $\Delta \Lambda$, ut & ΔE arcui ΓM , & arcus $H N$ arcui ΔK : quocirca arcus $E N, N H$ simul sumpti æquales sunt arcibus $\Delta \Delta, \Delta K$ simul, hoc est arcus ΓH arcui $K \Lambda$. Pari modo arcus $M \Gamma, \Gamma N$ simul (hoc est arcus $M N$) æquales



æquales sunt arcui ΔE . Sed (per nuperrime demonstrata) ratio arcus MN ad arcum KA , sive arcus ΔE ad arcum ΓH , minor est ratione semidiametri Sphæræ ad sinum arcus KZ ; quæ quidem ratio eadem est ac ratio sinus arcus EZ ad semidiametrum circuli circum $B\Delta$ contingentis ipsique BT æquidistantis. Est igitur ratio arcus ΔE ad ΓH minor dictis rationibus; ad eoque invertendo, ratio ΓH ad ΔE major est ratione diametri circuli contingentis circum $B\Delta$, ad diametrum circuli per E transeuntis & plano circuli BHT æquidistantis. *Q. E. D.*



Si vero punctum Λ cadat inter Δ & E , res manifesta est.

Ostendimus igitur quomodo se res habet, quæcunque fuerit ratio arcuum ΓH ad ΔE , sive majoris ad minus, sive minoris ad majus.

Δ Constat etiam ex jam dictis, quod si punctum Δ fuerit terminus quadrantis $B\Delta$, ratio arcus ΓH ad ΔE minor erit ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli tangentis circum $B\Delta$, ipsique BHT æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem æquidistantis & per punctum B transeuntis.

Unde si terminus quadrantis fuerit inter puncta Δ , E , & arcus ΔE bifariam divisus fuerit; ratio arcus ΓH ad arcum ΔE & minor erit & major rationibus illis.

Si vero terminus quadrantis non fuerit medio loco inter puncta Δ , E , erit ratio arcus ΓH ad ΔE minor ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli contingentis $B\Delta E$ planoque BHT æquidistantis; major vero ratione diametri Sphæræ ad diametrum circuli eidem plano æquidistantis, qui vel per punctum Δ vel Z transit, quod scilicet remotius fuerit a puncto termini quadrantis.

Coroll. Arcu igitur BT motu æquabili describi supposito, momenta arcus $B\Delta$ erunt ubique ut quadrata sinuum distantiarum à polo Z . Unde etiam constabunt ea omnia, quæ in Prop. XII^{ta} plenius demonstrasse oportuit.



F I N I S.